

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Нагибович Александр Игоревич

**СУПЕРЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
БОЛЬШЕРАЗМЕРНЫХ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ
«ОСНОВАНИЕ – ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ –
МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ»**

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
член-корреспондент РААСН,
Белостоцкий Александр Михайлович

Москва – 2019 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ БОЛЬШЕРАЗМЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ	13
1.1. Общие положения	13
1.2. Стадионы к чемпионату мира по футболу 2018 года	16
1.3. Особенности математического моделирования напряженно-деформированного состояния несущих конструкций футбольных стадионов	18
1.4. Численные методы моделирования НДС и динамических характеристик большеразмерных сооружений	20
<i>1.4.1. Методы дискретизации пространства</i>	21
<i>1.4.2. Метод суперэлементов</i>	22
<i>1.4.3. Метод динамического синтеза подконструкций</i>	26
1.5. Современные конечноэлементные программные комплексы	30
1.6. Выводы по главе 1	32
ГЛАВА 2. СУПЕРЭЛЕМЕНТНАЯ МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ «ОСНОВАНИЕ – ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ – МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ПОКРЫТИЯ»	33
2.1. Общие положения	33
2.2. Основные уравнения поведения сооружения	37
2.3. Численная аппроксимация задач линейной теории упругости	40
<i>2.3.1. Конечноэлементная аппроксимация уравнений поведения сооружения</i> 40	
<i>2.3.2. Алгоритмы решения системы линейных алгебраических уравнений</i>	40
<i>2.3.3. Алгоритмы решения частной проблемы собственных значений</i>	43
<i>2.3.4. Метод суперэлементов</i>	44
2.4. Программная реализация разработанной методики	52
<i>2.4.1. Базовое программное обеспечение</i>	52

2.4.2. Собственные программные разработки.....	56
2.5. Выводы по главе 2	58
ГЛАВА 3. ВЕРИФИКАЦИЯ СУПЕРЭЛЕМЕНТНОЙ МЕТОДИКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ «ОСНОВАНИЕ – ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ – МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ПОКРЫТИЯ» .	59
3.1. Обоснование выбора верификационных задач	59
3.2.1. Расчетные КЭ-модели.....	60
3.2.2. Результаты расчетов.....	64
3.3. Моделирование динамических характеристик входного блока ТЦ «Волгамолл» по разработанной методике	67
3.3.1. Описание несущих конструкций. Параметры расчета.....	67
3.3.2. Расчетные КЭ-модели.....	70
3.3.3. Порядок проведения расчетов.....	72
3.3.4. Исследование влияния подробности сетки конечных элементов на динамические характеристики	73
3.3.5. Результаты расчетов без использования суперэлементов	76
3.3.6. Результаты расчетов с использованием суперэлементов	79
3.4. Выводы по главе 3	96
ГЛАВА 4. АПРОБАЦИЯ СУПЕРЭЛЕМЕНТНОЙ МЕТОДИКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ «ОСНОВАНИЕ – ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ – МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ПОКРЫТИЯ» .	98
4.1. Описание конструкций исследуемых стадионов.....	99
4.1.1. Описание конструкций стадиона в г. Нижний Новгород.....	99
4.1.2. Описание конструкций стадиона в г. Ростов-на-Дону.....	106
4.2. Описание расчетных КЭ-моделей исследуемых стадионов	112
4.2.1. Расчетные КЭ-модели стадиона в г. Нижний Новгород.....	112
4.2.2. Расчетные КЭ-модели стадиона в г. Ростов-на-Дону.....	115
4.2.3. Описание особенностей, разработанных КЭ-моделей несущих конструкций футбольных стадионов	118

4.2.4. Параметры расчетов.....	119
4.3. Результаты расчетов стадиона в Нижнем Новгороде	120
4.3.1. Результаты динамического расчета полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» и составляющих её подсистем.....	120
4.3.2. Анализ результатов динамических расчетов полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» и составляющих её подсистем.....	126
4.4. Результаты расчетов стадиона в Ростове-на-Дону	128
4.4.1. Результаты динамического расчета полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» и составляющих её подсистем.....	128
4.4.2. Анализ результатов динамических расчетов полной системы и составляющих её подсистем.....	134
4.5. Анализ вычислительной эффективности разработанной методики....	136
4.6. Выводы по главе 4	145
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ	147
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	149

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования.

Ключевая особенность математического моделирования (здесь и далее везде подразумевается, что математическое моделирование осуществляется с использованием численных методов, реализуемых в программных комплексах) статического и динамического напряженно-деформированного состояния (НДС) уникальных объектов строительства: разработку и расчетную оптимизацию связанных большеразмерных основных подсистем «основание», «железобетонные конструкции», «металлические конструкции покрытия» ведут независимо различные проектно-конструкторские организации. Размерность комбинированных строительных систем может достигать сотен тысяч различных типов конструктивных элементов и, соответственно, десятков миллионов степеней свободы их конечноэлементных моделей. Построить адекватную расчетную модель полной системы, например, современных футбольных стадионов, таким организациям не представляется возможным. Препятствиями к этому служат различные факторы: от несовместимости форматов файлов расчетных моделей в различных программных комплексах и большой вычислительной размерности таких моделей до коммерческих тайн.

Для решения этой проблемы необходимо разработать методику математического моделирования, позволяющую обосновать возможность перехода к проведению расчетов в рамках отдельных моделей подсистем («организационный» аспект) и снизить вычислительную размерность задачи.

Степень разработанности темы исследования. Суперэлементные подходы широко применяются в аэрокосмической отрасли и машиностроении, но не представлены в должной степени в строительстве. Методика математического моделирования комбинированных большеразмерных систем, реализующая упомянутые суперэлементные подходы, является эффективным способом преодоления проблемы обоснования возможности перехода к расчетам НДС и динамических характеристик (значимых собственных частот и форм колебаний) в рамках моделей подсистем и снижения вычислительной размерности. В связи с

этим настоящее диссертационное исследование необходимо рассматривать с позиций развития современных методик определения НДС и динамических характеристик комбинированных большеразмерных систем с надлежащей верификацией и апробацией.

Целью диссертационной работы является разработка, верификация и апробация эффективной методики суперэлементного моделирования динамических характеристик большеразмерных систем «основание – железобетонные конструкции – металлоконструкции покрытия», например, современных футбольных стадионов (далее – Методики).

Задачи, решенные для достижения поставленной цели:

1. 1. Аналитический обзор современных математических моделей, численных методов и программных средств, в том числе и суперэлементных, статических и динамических расчетов комбинированных большеразмерных систем строительных конструкций и сооружений.

2. Разработка суперэлементной Методики, позволяющей обоснованно разделить исходную систему на связанные подсистемы «основание», «железобетонные конструкции», «металлические конструкции», а также снизить вычислительную размерность задач.

3. Программная реализация разработанной Методики в базовом программном комплексе.

4. Верификация разработанной Методики на модельных и тестовых задачах, имеющих альтернативное численное подтверждение, прежде всего, на полных конечноэлементных моделях.

5. Апробация и подтверждение «организационной» и вычислительной эффективности Методики на реальных большеразмерных комбинированных системах футбольных стадионов, возведенных к Чемпионату мира по футболу 2018 года в России.

Объект исследования. Комбинированные большеразмерные системы «основание – железобетонные конструкции – металлоконструкции покрытия» и их динамические характеристики.

Предмет исследования. Высокоточное определение динамических характеристик систем «основание – железобетонные конструкции – металлоконструкции покрытия».

Научная новизна работы:

1. Разработана Методика, позволяющая обоснованно разделить исходную систему на связанные подсистемы «основание», «железобетонные конструкции», «металлические конструкции» уникальных объектов строительства, также снизить вычислительную размерность задач.

2. На программном комплексе, реализующем Методику, показана эффективность разработанного подхода к исследованию динамических характеристик комбинированных большеразмерных систем схожего типа.

3. С применением разработанной Методики впервые решены наукоемкие задачи высокого уровня ответственности, сложности и вычислительной размерности – проведены расчетные исследования динамических характеристик футбольных стадионов в Санкт-Петербурге, Самаре, Волгограде, Нижнем Новгороде, Ростове-на-Дону, Екатеринбурге.

4. Для рассмотренных стадионов исследована специфика использования разработанной Методики и реализована на практике возможность «параллельной» работы групп разработчиков основных подсистем большеразмерных задач.

Теоретическая значимость работы. Разработана, верифицирована и апробирована методика суперэлементного моделирования динамических характеристик комбинированных большеразмерных систем «основание – железобетонные конструкции – металлоконструкции покрытия» уникальных объектов строительства.

Практическая значимость работы заключается в том, что разработанная, верифицированная и апробированная методика суперэлементного моделирования использовалась при расчетном обосновании НДС и прочности футбольных стадионов в Санкт-Петербурге, Самаре, Волгограде, Нижнем Новгороде, Ростове-на-Дону, Екатеринбурге. Она обеспечивает новый, востребованный современной практикой уровень расчетных исследований статике и динамики

пространственных большеразмерных комбинированных систем «основание – железобетонные конструкции – металлоконструкции покрытия».

Методология и методы исследования. При подготовке диссертации были использованы современные достижения прикладной математики и строительной механики в области численных методов определения динамических характеристик пространственных комбинированных большеразмерных систем. В частности, в качестве расчетных моделей объектов рассматривались пространственные динамические конечноэлементные модели комбинированных систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлоконструкции покрытия». Для нахождения собственных частот и форм колебаний в энергетически значимом диапазоне указанных систем применяется блочный метод Ланцоша. Для определения динамических характеристик подсистем с суперэлементами применялись методы динамического синтеза подконструкций. Проведена реализация разработанной методики и алгоритмов на параметрическом языке программирования APDL. Верификация и апробация методики проведены с использованием универсального, верифицированного программного комплекса ANSYS Mechanical, реализующего метод конечных элементов (МКЭ) и численные методы решения динамических задач.

Положения, выносимые на защиту:

– результаты аналитического обзора современных постановок, численных методов и программных комплексов, применяемых для расчетов комбинированных большеразмерных систем «основание – железобетонные конструкции – металлоконструкции покрытия» при различных воздействиях;

– разработанная методика суперэлементного моделирования динамических характеристик пространственных большеразмерных систем «основание – железобетонные конструкции – металлоконструкции покрытия» уникальных объектов строительства, программно реализующая современные подходы математического моделирования;

– результаты численного решения верификационных задач, показавших возможности, ограничения, «организационную» и вычислительную

эффективность разработанной методики и ее программно-алгоритмических составляющих;

– результаты расчета динамических характеристик реальных систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлоконструкции покрытия» стадионов в Нижнем Новгороде и Ростове-на-Дону к Чемпионату мира по футболу 2018 года.

Личный вклад автора диссертации заключается в обоснованной конкретизации задач исследования, обобщении, систематизации и развитии теоретических составляющих исследуемых вопросов, также разработке, верификации и апробации суперэлементной методики. Соискателем самостоятельно разработаны расчетные конечноэлементные и суперэлементные модели, получены, интерпретированы и апробированы основные результаты исследования.

Достоверность и обоснованность научных положений подтверждается удовлетворительным соответствием полученных результатов результатам контрольных расчетов, выполненных с привлечением верифицированного в системе Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) комплекса программ промышленного типа. Также – практическим опытом использования разработанной суперэлементной методики для реальных уникальных объектов строительства с достаточной степенью сходства результатов с альтернативными, независимо полученными.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях: XXV Международная конференция «Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов» BEM&FEM, г. Санкт-Петербург, 23-26 сентября 2013 г. V Международный симпозиум РААСН «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений», г. Иркутск, 1-6 июля 2014 г. XXVI Международная конференция «Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций» (BEM&FEM), г. Санкт-Петербург, 28-30 сентября 2015 г. VI Международный

симпозиум РААСН «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений», г. Владивосток, 15-20 августа 2016 г. V Международный форум высотного и уникального строительства 100+ Forum Russia, г. Екатеринбург, 4-6 октября 2017 г. VII Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения»), г. Москва, 14 февраля 2018 г., VII Международный симпозиум РААСН «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений», г. Новосибирск, 1-8 июля 2018 г., на регулярных научных семинарах кафедры прикладной математики Научно-исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ) и Научно-исследовательского центра СтаДиО (под руководством члена-корреспондента РААСН А.М. Белостоцкого).

Внедрение результатов исследования. Разработанная суперэлементная методика применялась автором при расчетном обосновании статического и динамического НДС, прочности и устойчивости несущих конструкций стадионов в Санкт-Петербурге, Самаре, Волгограде, Нижнем Новгороде, Ростове-на-Дону, Екатеринбурге при различных воздействиях. Результаты расчетов были сопоставлены с альтернативными, независимо полученными другими командами расчетчиков, и показали достаточную степень сходства. Эти расчетные обоснования в составе проектов футбольных стадионов получили положительное заключение в Главгосэкспертизе России. За цикл научно-исследовательских работ по комплексному расчетному обоснованию безопасности футбольных стадионов к Чемпионату мира 2018 автор диссертации в составе коллектива НИЦ СтаДиО награжден золотой медалью РААСН по строительным наукам за 2017 год.

Публикации. Основные положения диссертационной работы представлены в 8 публикациях в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, в том числе во входящем в Перечень ВАК РФ по специальности 05.13.18 и в издании, индексируемом в международных базах цитирования Scopus; получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы (129 наименований, в том числе – 60 на иностранных языках). 161 страницы основного текста, 31 рисунка и 42 таблиц.

Во **введении** приводится обоснование актуальности работы, определены проблемы, цели и задачи исследований, перечислены основные научные и практические результаты, кратко изложено содержание диссертации по главам.

В первой главе представлен краткий обзор современного состояния проблемы моделирования несущих конструкций уникальных большеразмерных сооружений. Приведен ряд особенностей математического моделирования НДС несущих конструкций современных футбольных стадионов большой вместимости (от 35 000 до 68 000 зрителей) как ярких примеров комбинированных систем «основание – железобетонные конструкции – металлоконструкции покрытия».

Далее приведен аналитический обзор современных постановок, численных методов и программных комплексов для расчетов динамических характеристик указанных комбинированных большеразмерных систем.

Вторая глава посвящена описанию разработанной методики суперэлементного моделирования динамических характеристик пространственных большеразмерных систем «основание – железобетонные конструкции – металлоконструкции покрытия». Представлены лежащие в основе разработанной суперэлементной методики математические формулировки наиболее эффективных современных подходов математического моделирования, а также описание её программной реализации.

Третья глава посвящена описанию результатов верификации разработанной суперэлементной методики на тестовых задачах. На основе представленных и проанализированных результатов верификационных расчетных исследований обоснована применимость суперэлементных подходов моделирования динамических характеристик исследуемых комбинированных большеразмерных систем. Продемонстрирована «организационная» и вычислительная эффективность методики и сформулированы рекомендации по

выбору вариантов метода динамического синтеза подконструкций и количества учитываемых внутренних форм колебаний подконструкции.

В четвертой главе представлены результаты апробации разработанной суперэлементной методики на большеразмерных задачах. Объектами исследования выбраны спроектированные и построенные к чемпионату мира по футболу 2018 года стадионы большой вместимости (45 000 зрителей): в Нижнем Новгороде и Ростове-на-Дону, как показательные примеры применения всех ветвей разработанной методики. На основе полученных результатов расчетных исследований продемонстрирована «организационная» и вычислительная эффективность разработанной методики.

ГЛАВА 1. ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ БОЛЬШЕРАЗМЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

1.1. Общие положения

Проектирование и строительство современных уникальных зданий и сооружений сложных архитектурных форм не представляется возможным без расчетного обоснования их механической безопасности и многогранных исследований поведения несущих конструкций при разного рода воздействиях.

Яркими примерами наиболее ответственных объектов строительства являются уникальные большепролетные сооружения, такие как: стадионы, дворцы спорта и аквапарки, торгово-развлекательные комплексы, пешеходные автомобильные и железнодорожные мосты различных конструктивных решений.

Уникальными, в соответствии с терминологией, установленной в градостроительном кодексе Российской Федерации, являются здания и сооружения, в проектах которых имеется любая из следующих характеристик:

- использование конструкций и конструктивных систем, требующих применения нестандартных методов расчета, либо разработки специальных методов расчета, либо требующих экспериментальной проверки на физических моделях, а также применяемых на территориях, сейсмичность которых превышает 9 баллов;

- высота более 100м;

- пролет более 100м;

- вылет консолей более 20м;

- заглубление подземной части ниже планировочной отметки земли более чем на 10 метров.

К уникальным зданиям и сооружениям также относятся, зрелищные, спортивные, культовые сооружения, выставочные павильоны, многофункциональные офисные, торгово-развлекательные комплексы и т.п. с

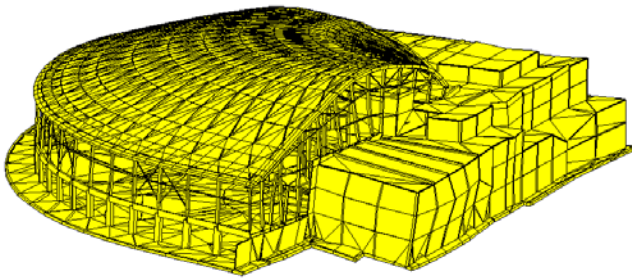
максимальным расчётным пребыванием более 1 000 человек внутри объекта или более 10 000 человек вблизи объекта [29].

Обеспечение механической безопасности такого рода сооружений является приоритетной задачей на всех этапах жизненного цикла (проектирование, строительство, эксплуатация).

Научно-исследовательским центром СтаДиО за последние 15 лет, в рамках строительно-технических экспертиз, выполнен анализ возможных причин локальных разрушений и прогрессирующего обрушения конструкций покрытия ряда большепролетных зданий. Среди них спортивно-оздоровительный комплекс «Трансвааль парк» (рисунок 1.1), Басманный рынок (рисунок 1.2), крытый конькобежный центр «Крылатское» (рисунок 1.3) и другие.

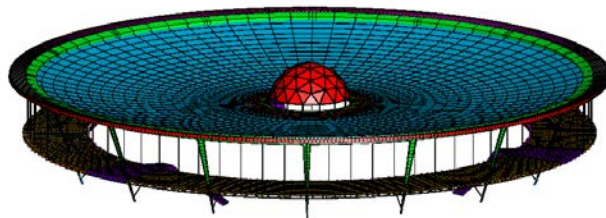
По выводам представленных экспертиз были предложены, реализованы и/или нормативно закреплены для уникальных зданий и сооружений:

- разработка специальных технических условий (СТУ) для проектирования уникальных объектов строительства;
- «независимые» расчёты по двум (а если необходимо, то и более) альтернативным расчетным моделям и верифицированным программным комплексам с содержательным сопоставлением результатов по основным критериям параметрам;
- разработка и реализация обязательной системы мониторинга конструкций для стадий возведения и эксплуатации;
- верификация программных средств по правилам утверждённым РААСН;
- организация в 2006 году и плодотворная работа научного совета РААСН «Программные средства в строительстве и архитектуре», международного симпозиума «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений», международной ежегодной конференции «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения»). Все выше перечисленные нововведения позволили на новом уровне подходить к решению задач обеспечения механической безопасности уникальных зданий и сооружений [9].



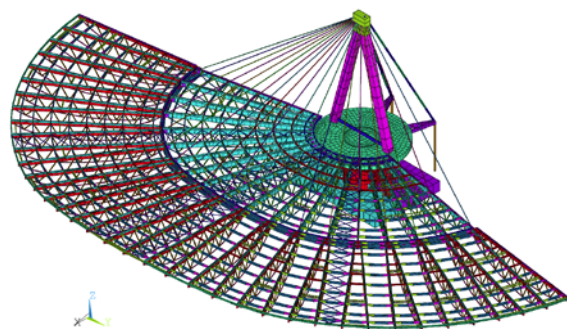
КЭ-модель. ПК «Стадио»

Рисунок.1.1. Спортивно-оздоровительный комплекс «Трансвааль парк»



КЭ-модель. ПК ANSYS Mechanical

Рисунок.1.2. Басманный рынок



КЭ-модель. ПК ANSYS Mechanical

Рисунок.1.3. Крытый конькобежный центр «Крылатское»



1.2. Стадионы к чемпионату мира по футболу 2018 года

В 2018 году, в период с 14 июня по 15 июля, в России прошел Чемпионат Мира по футболу. Подготовка к этому мероприятию потребовала значительных затрат и, в первую очередь, проектирования и строительства новых весьма вместительных стадионов, отвечающих требованиям современных безопасности и критериям FIFA.


К проведению чемпионата построены и реконструированы 12 футбольных стадионов. Краткая справочная информация о них приведена в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Футбольные стадионы, подготовленные к ЧМ 2018 в России

Город	Название	Вместимость, чел.	Фотография
Москва	Лужники	81 000	
Санкт-Петербург	Санкт-Петербург Арена («Зенит»)	67 800	
Москва	Спартак	45 000	
Казань	Казань Арена	45 000	
Саранск	Мордовия Арена	45 015	

Таблица 1.1. Футбольные стадионы, подготовленные к ЧМ 2018 в России.

Продолжение

Город	Название	Вместимость, чел.	Фотография
Екатеринбург	Екатеринбург Арена	35 000	
Самара	Самара Арена	44 918	
Ростов-на-Дону	Ростов Арена	43 702	
Калининград	Стадион Калининград	35 015	
Нижний Новгород	Нижний Новгород Арена	44 899	
Волгоград	Волгоград Арена	45 015	
Сочи	Фишт	44 000	

1.3. Особенности математического моделирования напряженно-деформированного состояния несущих конструкций футбольных стадионов

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния (НДС) этих уникальных большепролетных сооружений имеет ряд особенностей, таких как:

- большая вычислительная размерность статических и динамических конечноэлементных задач (возможно, десятков миллионов), требующая применения развитых «решателей» и распределенных параллельных вычислений.

- большое число расчетных сочетаний нагрузок и воздействий (до нескольких сотен), значимый вклад в которые вносят многовариантные снеговые, ветровые, аварийные и сейсмические воздействия;

- моделирование неоднородного грунтового основания и свайного поля, содержащего несколько тысяч свай;

- многоитерационный процесс дополнения и корректировки положения несущих конструкций стадиона на основании результатов статических и динамических расчетов для удовлетворения критериям зыбкости конструкции «гребенки» трибун;

- расчет железобетонных конструкций с учетом продольного и поперечного армирования с использованием объемных нелинейных моделей железобетона;

- уточненный трехмерный физически нелинейный конечноэлементный анализ НДС и прочности наиболее напряженных конструктивных узлов железобетонных конструкций и металлических покрытий с учетом реальной диаграммы деформирования;

- расчет на устойчивость металлических конструкций покрытий с учетом физической и геометрической нелинейностей и начальных несовершенств;

- геометрически нелинейное моделирование предварительно напряженных (преднапряженных) вантовых элементов в составе конструкций покрытия при расчете на прогрессирующее обрушение;

– расчеты на сейсмические воздействия не только по платформенной схеме, но и с учетом волнового характера, значимо проявляющегося для протяженных контактных зон «основание-фундамент»;

– сравнительный анализ НДС, собственных частот и форм колебаний полной системы конструкций стадиона и подсистем «металлические конструкции покрытия» и «основание – железобетонные конструкции трибун», позволяющий обосновать возможность/невозможность исследования подсистем в рамках отдельных моделей различными коллективами конструкторов-расчетчиков;

– сопоставление результатов альтернативных расчетов, выполненных согласно требованиям специальных технических условий, в верифицированных/сертифицированных программных комплексах;

– оптимизационный процесс дополнения и корректировки конструкций сборно-разборных (временных) трибун для удовлетворения критериев прочности и устойчивости несущих элементов конструкции и динамической комфортности (зыбкости) трибун в целом при расчетах с учетом статических и динамических воздействий;

Эти и ряд других проблем математического моделирования требуют углубленных исследований, разработки эффективных методик и подходов решения указанных наукоемких задач строительства [10-13].

Одна из ключевых особенностей математического моделирования статического и динамического НДС уникальных большепролетных сооружений такого типа состоит в том, что проектированием и расчетами различных подсистем несущих конструкций, таких как «основание», «железобетонные конструкции фундаментов и трибун» и «металлические конструкции покрытия» занимаются автономные проектные организации. Такая особенность характерна как для отечественной практики [32, 33, 39, 43, 49], так и для зарубежной [75, 77, 99, 103, 106]. Как правило, построить расчетную модель полной системы «основание – железобетонные конструкции чаши стадиона – металлические конструкции крыши» не представляется возможным. Препятствиями к этому служат различные факторы, от большой вычислительной размерности таких

моделей до несовместимости форматов файлов расчетных моделей в различных программных комплексах и коммерческих тайн. Следовательно, необходимо обосновать возможность перехода от исследования полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» футбольных стадионов к отдельным подсистемам.

Одним из способов преодоления этой проблемы является сравнительный анализ собственных частот и форм колебаний полной системы конструкций стадиона и подсистем, как важных показателей, отражающих жесткостные и инерционные свойства, и также лежащих в основе всех динамических расчетов. Сопоставив эти динамические характеристики полной системы сооружения и подсистем можно оценить насколько велико взаимное влияние податливости опорной подсистемы «основание – железобетонные конструкции чаши» на статическое состояние, динамику и устойчивость подсистемы «металлоконструкции покрытия» и сделать соответствующие выводы о возможности (или невозможности) исследования статического и динамического НДС в рамках отдельных подсистем.

Как альтернативный и универсальный подход, не требующий построения полной модели системы, может быть применен метод суперэлементов. На основе него предполагается разработка методики математического моделирования динамических характеристик систем «основание – железобетонные конструкции – металлические конструкции покрытия».

1.4. Численные методы моделирования НДС и динамических характеристик большеразмерных сооружений

Размерность уникальных комбинированных строительных систем может достигать сотен тысяч различных типов конструктивных элементов и, соответственно, десятков миллионов степеней свободы их конечноэлементных моделей. Основным и важнейшим этапом в исследовании НДС прочности и устойчивости таких систем является разработка адекватных пространственных моделей и методов расчета конструкций.

Признанными ведущими специалистами отечественных методических и программно-алгоритмических разработок последних 20-ти лет в этой области являются А.М. Белостоцкий [8-20], А.С. Городецкий [28], О.В. Кабанцев [37, 38], Н.И. Карпенко [40, 41], С.Н. Карпенко [42], О.В. Мкртычев [50, 51], А.В. Перельмутер [54, 55], В.А. Семенов [45], В.И. Травуш [61, 62], О.В. Трифонов [63], С.Ю. Фиалко [64-66].

1.4.1. Методы дискретизации пространства

В настоящий момент доминирующие позиции в дискретизации краевых задач занимает метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий решать широчайший комплекс задач математического моделирования в самых различных областях.

Метод конечных элементов [27, 34], относится к вариационным методам. Впервые математические основы этого метода были сформулированы Р. Курантом в 1943г.[83]. Термин «конечный элемент» первым ввел Р. Клаф 1960 г. Развитие метод получил благодаря таким ученым как К. Батэ, Е. Вилсон [6], О. Зенкевич [34, 35] и др., работы которых стали классикой в области численных методов механики.

В основе метода лежит идея аппроксимации непрерывной функции дискретной моделью, построенной на множестве кусочно-непрерывных функций, каждая из которых определена на конечном числе подобластей – конечных элементов. Исследуемая область дробится на элементы, и на каждом из них неизвестная функция аппроксимируется определенной функцией (как правило эта функция является полиномом). Эти функции должны удовлетворять граничным условиям непрерывности, совпадающим с граничными условиями, налагаемыми самой задачей. Выбором аппроксимирующей функции для каждого элемента определяется его тип элемента [34].

В настоящее время существуют сотни «семейств» разработанных конечных элементов, позволяющих моделировать всевозможные характеристики и напряженно-деформированное состояние (НДС) исследуемых систем в различных

постановках: плоской, осесимметричной или трехмерной. Современные «продвинутые» программные комплексы имеют обширные библиотеки конечных элементов включающие: стержневые (прямо- и криволинейные), двумерные (для моделирования плоского напряженного, плоского деформированного или осесимметричного состояния), плитные (одно- и многослойные, тонко-, средне- и толстостенные) и оболочечные (постоянной и переменной толщины), трехмерные (объемные) конечные элементы.

Большинство современных «тяжелых» универсальных и специализированных программных комплексов построено на базе МКЭ. В них, как правило, представлены инструменты для решения пространственных задач в статической и динамической постановках. МКЭ уверенно сохраняет свои лидирующие позиции при комплексном анализе комбинированных систем, включающих стержневые, плитно-оболочечные и объемные элементы.

1.4.2. Метод суперэлементов

Эффективным подходом, позволяющим перейти к исследованию динамических характеристик комбинированной системы независимыми коллективами проектировщиков является метод суперэлементов (МСЭ) [1-5, 7, 18-20], известный также как метод подконструкций. Применение этого метода дает возможность значительно снизить время, требуемое для решения задачи. Такой эффект достигается путем снижения порядка системы разрешающих уравнений. Эффективность МСЭ особенно проявляется в случае, когда исследуемая конструктивная система является комбинированной и состоит из большого количества идентичных подсистем. Такой учет повторяемости снижает количество арифметических действий, что в свою очередь приводит к экономии времени. Также существенно сокращается объем хранимой и перерабатываемой информации. Ещё одним достоинством МСЭ является то, что структура данных организована таким образом, что локальные изменения, внесенные в расчетную схему, могут осуществляться независимо для каждой отдельной подконструкции, при этом с минимальными вычислительными затратами, так как не требуется

повторного проводить начальный этап расчета для остальных подконструкций, оставшихся без изменений.

Суперэлементный расчет состоит из следующей последовательности шагов:

1. Декомпозиция. Исходная полная модель всей системы делится на независимые подконструкции. Для каждой из них решение задачи существенно проще, чем расчет всей системы в целом. В каждой подконструкции узловые неизвестные разделяются на две группы – «внутренние» и «граничные».

2. Конденсация. На этом шаге производится исключение из системы разрешающих уравнений всех неизвестных, соответствующих внутренним узлам для каждой подконструкции, путем выражения их через граничные неизвестные. Далее подконструкция рассматривается единый конечный элемент – «суперэлемент». Узлы этого элемента являются граничными узлами всей подконструкции.

3. Сборка. Для получения полной модели исходной системы объединяются все сформированные суперэлементы. У стыкуемых суперэлементов отождествляются их соответствующие степени свободы. Для всех суперэлементов системы уравнений объединяются в единую глобальную систему уравнений относительно граничных неизвестных.

4. Вычисление. На последнем шаге производится решение полученной глобальной системы уравнений. Определяются значения граничных неизвестных для всех подконструкций, и, с помощью зависимостей, использовавшихся для их исключения, вычисляются значения внутренних неизвестных.

Каждая подконструкция описывается набором редуцированных матриц влияния (матрицы жесткости, демпфирования, масс). Большинство современных «продвинутых» конечноэлементных программных комплексов имеют функционал для импорта-экспорта таких матриц, что позволяет обеспечить совместную разработку и точный анализ сложных комбинированных систем при статических и динамических воздействиях.

Существует также возможность создания многоуровневой иерархии суперэлементов. Если каждую подконструкцию разбить подконструкции

меньшего размера, которые, в свою очередь, также могут быть разбиты и т.д. Объединение нескольких суперэлементов в суперэлемент более высокого уровня осуществляется при помощи сборки, как и для суперэлементов самого первого уровня.

Метод суперэлементов подразумевает полное исключение внутренних степеней свободы для подконструкций (суперэлементов), т.е. задача решается только на множестве граничных неизвестных суперэлемента. Впервые работы по использованию МСЭ в форме метода перемещений в связке с МКЭ для нахождения собственных частот и форм колебаний комплексных конструкций были опубликованы в середине 60-х годов. В статьях Б. Айронса [1, 2], Р. Гайана [26] и в монографиях [56, 113] метод суперэлементов формулируется на основе процедуры статической конденсации. При реализации такого подхода вынужденно необходимо принять допущение об отсутствии инерционных сил во внутренних узлах суперэлемента. Чтобы устранить возникающую при этом погрешность в решении Б.А. Курановым, и С.С. Гусевым в своей работе [44] была предложена процедура линеаризации характеристик подконструкций с применением итерационного уточнения собственных значений.

МСЭ в линейно-статических расчетах можно рассматривать как один из вариантов блочного метода исключения для решения СЛАУ. Следовательно, очевидным распространением метода на динамические задачи может быть применение суперэлементного алгоритма решения СЛАУ на каждом шаге неявной схемы прямого интегрирования уравнений движения. При решении задачи о собственных значениях методами итераций подпространства или Ланцоша суперэлементный алгоритм решения СЛАУ применяется на каждой итерации. Альтернативный подход заключается в создании специализированных суперэлементных алгоритмов, построенных на непосредственной конденсации уравнений движения.

Реакция многих сооружений на динамические воздействия проявляет существенно нелинейный характер только в одной или нескольких заранее известных областях. Остальная же часть сооружения, при этом, ведет себя

линейно-упруго. В исследуемых в настоящей работе комбинированных системах нелинейный характер проявляется у подсистем «металлические конструкции покрытия», а для опорных подсистем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» свойственно в основном линейно-упругое поведение. Метод суперэлементов удобно использовать при расчете сооружений, имеющих локальные нелинейности. В работе [1] предложен подход, основная идея которого состоит в том, что в качестве граничных, рассматриваются неизвестные участвующие в нелинейных связях, остальные – как внутренние. Исключая внутренние степени свободы (это возможно, т.к. они участвуют только в линейных связях), переходим к нелинейной задаче, размерность которой существенно меньше. Решение задачи, полученной таким образом, оказывается менее трудоемким, чем исходной.

Недостатком метода суперэлементов является то, что при расчете подконструкций, точность может быть несколько ниже, чем при расчете полной модели системы. Возможное снижение точности связано с пропусками форм колебаний, при недостаточном количестве учтенных внутренних форм колебаний подконструкции. [129].

Значительное развитие метод суперэлементов для задач на собственные значения получил в работах Y.T. Leung [100]. Точные суперэлементные уравнения, выведенные в виде, подходящем для реализации в программных комплексах. На основе точных суперэлементных уравнений может быть сформулировано семейство приближенных постановок, включающее, как предельный случай, и вариант, основанный на предположении об отсутствии сил инерции во внутренних узлах подконструкций. В работе G.H. Sotiropoulos [121] показано, что при определенном выборе базиса для подконструкций, приближенные суперэлементные уравнения этого семейства эквивалентны уравнениям метода динамического синтеза.

1.4.3. Метод динамического синтеза подконструкций

Корректным вариантом метода суперэлементов для исследования динамических характеристик комбинированных систем независимыми коллективами проектировщиков и расчетчиков является метод динамического синтеза подконструкций. Этот метод занимает лидирующие позиции среди современных подходов используемых для редукиции (снижения вычислительной размерности) больших динамических задач [72, 108, 117, 122, 128]. Наибольшее распространение этот подход получил за рубежом, в первую очередь, в аэрокосмической отрасли. Метод динамического синтеза подконструкций включен в большое число коммерческих программных комплексов. Существует большое число работ зарубежных авторов, посвященных этому методу [73, 76, 96, 104, 112, 120, 123, 124, 127], подробный обзор некоторых приведен в [118]. Исследования метода динамического синтеза подконструкций отечественными авторами представлено в работах [23, 24, 25, 46, 47, 57, 59, 69].

В основе метода динамического синтеза подконструкций лежит та же идея, что и в методе статической конденсации – переход от полного набора физических степеней свободы к редуцированному набору обобщённых координат, т.е. для представления перемещений подконструкции используется процедура Релея-Ритца, в которой перемещения представляются в виде суперпозиции базисных векторов (форм).

При реализации метода динамического синтеза подконструкций основным вопросом является выбор граничных условий суперэлемента (подконструкции), с учетом которых определяются его собственные частоты и формы колебаний. Возможность варьирования существует только для обобщенных перемещений, связанных со стыковочными узлами (узлами, в которых производится стыковка суперэлемента с КЭ-моделью подсистемы или другими суперэлементами). Эти степени свободы называются внешними [30]. В зависимости от выбора этих граничных условий существующие методы динамического синтеза подконструкций можно классифицировать следующим образом:

- 1) методы фиксированной границы [81, 85, 94, 88, 115, 119];

- 2) методы свободных границ [74, 78, 82, 84, 101, 126];
- 3) смешанный метод [102];
- 4) метод нагруженных границ [79].

В методах фиксированных границ при определении динамических характеристик подконструкции граничные (стыковочные) степени свободы суперэлемента жестко закреплены. Впервые такой подход описал в своей работе Харти в 1965 г. [94]. В дальнейшем этот метод был упрощен Крейгом и Бемптоном [81], получив название в их честь. В силу своей эффективности, точности и простоты реализации метод динамического синтеза в форме Крейга – Бемптона стал наиболее распространенным способом взаимнообмена данными о динамических характеристиках подконструкций между смежными коллективами-разработчиками сложных конструкций. Однако вычислительная размерность редуцированной модели и использовании большого числа подконструкций по-прежнему может оставаться значительной. В таком случае существуют подходы, позволяющие провести процедуру исключения модальных координат. Описание таких методов можно найти в [129].

Чтобы упростить стыковку подконструкций и правильно учесть их жесткие смещения и перемещения граничных точек, к базису, состоящему из форм колебаний, имеет смысл добавить набор статических функций форм, каждая из которых является вектором упругих перемещений узлов подконструкции, вызванных единичным смещением по направлению соответствующей фиктивной связи для основной системы метода перемещений [20].

В методе свободных границ внешние степени свободы подконструкции не закреплены при определении её динамических характеристик. Этому методу посвящено большое количество работ [74, 82, 86, 93, 95, 105, 116, 129]. Методы свободных границ несколько менее точны, чем методы фиксированных границ, о чем отмечено в работе Zu-Qing Qu [129]. Для того чтобы компенсировать этот недостаток применяются методы учета остаточной податливости, а также учет низкочастотной аппроксимации при трансформации.

Для того чтобы учесть влияние собственных частот и форм колебаний подконструкции высшего диапазона, не учтенных при формировании суперэлемента [82], на колебания системы в низкочастотном диапазоне, вводится понятие остаточной податливости. В работе [116] предложен метод учета остаточных эффектов второго порядка, а в [95] для построения матриц остаточной податливости применяются аналитические выражения для собственных частот и форм колебаний.

Метод смешанной границы заключается в том, что при определении динамических характеристик подконструкции её граничные степени свободы частично закреплены, т.е. часть узлов жестко закреплена, остальные не закреплены. Такой подход впервые предложен R.H. MacNeal [102].

Метод нагруженной границы описан в [79]. При расчете динамических характеристик подконструкции к граничным степеням свободы добавляются жесткостные и инерционные нагрузки, чтобы приблизить собственные формы колебаний подконструкции к виду собственных колебаний системы в целом [30].

В [97] отмечается, что методы жестких границ, как правило, применяются для нахождения первых частот и форм собственных колебаний конструкции, а методы свободных и нагруженных границ больше используются для аппроксимации частот и форм в средней и верхней части частотного диапазона.

Использование собственных форм частот и форм колебаний подконструкций для описания их движения требует решения проблемы собственных значений и собственных векторов, что, в свою очередь, требует определенных вычислительных затрат. Хэйл и Мейровитч [89, 90, 107] предложили метод, позволяющий избежать решения проблемы собственных значений, в котором каждая подконструкция описывалась возможной функцией. Несколькими авторами в качестве возможных функций использовались векторы Ритца и векторы из подпространства Крылова [118]. При таком подходе точность остается на уровне с обычным вариантом, а вычислительные затраты при этом значительно снижаются.

Общим для всех вариантов методов динамического синтеза подконструкций является вопрос о необходимом количестве учитываемых внутренних частот и форм собственных колебаний подконструкции. Логично предположить, что при исследовании динамических характеристик системы в определенном частотном диапазоне, то необходимо учесть все собственные частоты и формы колебаний подконструкций в том же частотном диапазоне. Однако такое пренебрежение собственными частотам и формами более высокого диапазона порождает погрешность в математической модели и снижает точность полученных результатов. Исследования показывают, что в зависимости от локальных особенностей собственных форм колебаний подконструкций и способа их стыковки влияние колебаний высшего частотного диапазона на динамику системы в низшем диапазоне меняется с возрастанием их собственных частот. Причем это изменение существенно не монотонно. Исследованиям величины возникающей погрешности и выбору критериев её оценки посвящены работы [21, 31, 36, 92, 98, 109]. Представленные в этих работах подходы предназначены для автоматизации процесса выбора количества удерживаемых внутренних собственных частот и форм колебаний подконструкций. На практике же более удобно использовать рекомендации, предлагаемые в работах [36, 116] удерживать все собственные формы колебаний, частоты которых в 1,5-2 раза превосходят исследуемый частотный диапазон для всей системы.

Принципиально иной подход к оценке погрешности методов динамического синтеза подконструкций представлен в [30]. Предлагается методология, основанная на отказе от идеи удержания числа внутренних частот и форм собственных колебаний подконструкции сверх минимально необходимого, определяемого количеством тонов с частотами, попадающими в исследуемый интервал. Повышение точности при этом достигается с помощью конструктивного алгоритма формирования вспомогательных членов модального разложения при неизменном наборе сохраняемых собственных форм [30].

Вообще говоря, в методах динамического синтеза в качестве базиса для подконструкций может быть произвольная подходящая система линейно

независимых векторов, которая может не включать формы колебаний. Например, в статье J.H. Wang, H.R. Chen [125] применяется некоторый базис, для построения которого не требуется решение частной проблемы собственных значений для подконструкции.

Обзор современного состояния суперэлементных методов моделирования показывает их широкое применение в аэрокосмической отрасли, машиностроении и других технически передовых отраслях при практически полном отсутствии применения в строительной сфере. Однако использование новых суперэлементных моделей и методов для комплексного статического и динамического расчета комбинированных большеразмерных систем позволит реализовать возможность разумно независимой разработки различных разделов проектов, а также позволит эффективно использовать вычислительные ресурсы (в силу многомиллионных размерностей задач). [17].

1.5. Современные конечноэлементные программные комплексы

В данном разделе приведено краткое сравнение наиболее продвинутых и популярных современных "коммерческих" программных комплексов (ПК) для статического и динамического расчета сложных пространственных систем по наличию/отсутствию в них реализации метода суперэлементов и методов динамического синтеза подконструкций (см. таблицу 1.2). Сопоставлялись только те из программных комплексов, которые использовались в России для обоснования уникальных, в том числе, большепролетных зданий.

В соответствии со сложившимися представлениями и для лучшего понимания специфики, упомянутые ПК можно разделить на две основные группы:

- 1) универсальные («тяжелые») – *ANSYS Mechanical, ABAQUS/Simulia, MSC NASTRAN*;
- 2) специализированные («строительные») – *ANSYS CivilFEM, SOFiSTiK, Ing+ MicroFe, MIDAS Civil, Robot Structure, SCAD, Stark ES, ЛИРА САПР, ЛИРА 10*;
- 3) исследовательские – *СТАДИО*.

Таблица 1.2. Сравнительная таблица программных комплексов.

Название	Разработчик, страна	Статус в России	Поддержка метода статической конденсации	Поддержка метода динамического синтеза подконструкций
Универсальные «тяжелые» программные комплексы				
<i>ANSYS Mechanical*</i>	ANSYS Inc., США.	Верифицирован в РААСН Аттестован в Ростехнадзоре	да	да
<i>ABAQUS/Simulia</i>	Dassault (Франция), ранее ABAQUS, США	Верифицирован в РААСН Аттестован в Ростехнадзоре	да	да
<i>MSC NASTRAN</i>	MSC Softwear, США	Аттестован в Ростехнадзоре	да	да
Исследовательские программные комплексы				
<i>СТАДИО</i>	НИЦ СтаДиО, Россия	Аттестован в Ростехнадзоре Сертифицирован ЦПС	да	да
Специализированные («строительные») программные комплексы				
<i>ANSYS CivilFEM</i> (на платформе ANSYS)	Ingeciber, Испания	Аттестован в Ростехнадзоре Сертифицирован ЦПС	нет	нет
<i>Ing+ MicroFe</i>	Техсофт, Россия, mb AEC Software, Kretz Software, Германия	Верифицирован в РААСН Аттестован в Ростехнадзоре Сертифицирован ЦПС	нет	нет
<i>MIDAS Civil</i>	MIDAS, Ю.Корея	Верифицирован в РААСН	нет	нет
<i>Robot Structure</i>	AutoDesk, США	Аттестован в Ростехнадзоре Сертифицирован ЦПС	нет	нет
<i>SCAD</i>	SCADSoft, Украина	Аттестован в Ростехнадзоре Сертифицирован ЦПС	нет	нет
<i>SOFiSTiK</i>	<i>SOFiSTiK AG, Германия</i>	Аттестован в Ростехнадзоре Сертифицирован ЦПС	нет	нет
<i>Stark ES</i>	Еврософт, Россия	Сертифицирован ЦПС	нет	нет
<i>ЛИРА 10</i>	ЛираСофт, Украина.	Аттестован в Ростехнадзоре Сертифицирован ЦПС	нет	нет
<i>ЛИРА САПР</i>	LiraLand, Украина.	Верифицирован в РААСН Аттестован в Ростехнадзоре Сертифицирован ЦПС	нет	нет

* использовались в расчетной практике диссертанта

Как видно из приведенной классификации метод суперэлементов и методы динамического синтеза подконструкций реализованы, только в универсальных «тяжелых» и исследовательских программных комплексах и отсутствуют в специализированных «строительных».

1.6. Выводы по главе 1

На основе выполненного аналитического обзора состояния заявленной проблемы можно поставить и конкретизировать следующие задачи настоящего диссертационного исследования, которые следует решить для достижения поставленной цели – разработки суперэлементной методики моделирования динамических характеристик систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» футбольных стадионов:

1. Обоснованный выбор наиболее эффективных современных математических моделей, численных методов и их программных реализаций как основы разрабатываемой методики.

2. Разработка суперэлементной методики моделирования динамических характеристик комбинированных большеразмерных систем «основание – железобетонные конструкции – металлические конструкции покрытия».

3. Верификация разработанной суперэлементной методики на тестовых задачах, имеющих аналитическое, экспериментальное и (или) альтернативное численное подтверждение.

4. Апробация и подтверждение работоспособности и эффективности методики на реальных системах «основание – железобетонные конструкции – металлоконструкции покрытия». Применение разработанной методики к расчету несущих конструкций реальных спроектированных и возведенных футбольных стадионов к Чемпионату мира по футболу 2018 г. в России.

Главы 2-4 диссертации посвящены описанию решения поставленных задач.

ГЛАВА 2. СУПЕРЭЛЕМЕНТНАЯ МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ «ОСНОВАНИЕ – ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ – МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ПОКРЫТИЯ»

2.1. Общие положения

В настоящей главе приведено подробное описание разработанной методики суперэлементного моделирования динамических характеристик систем «основание – железобетонные конструкции – металлические конструкции» [52].

Как уже было сказано ранее, при проектировании таких сложных комбинированных систем, разработкой проектной документации и расчетным обоснованием механической безопасности связанных подсистем «основание – железобетонные конструкции» и «металлические конструкции» занимаются различные организации. Таким образом, необходимо реализовать возможность расчета подсистем в рамках отдельных моделей разными организациями. Сделать это можно двумя способами. В первом случае сопоставляя динамические характеристики полной системы и подсистем, оценить их взаимное влияние и тем самым обосновать возможность перехода к отдельным моделям. Во втором, универсальном, случае воспользоваться суперэлементными технологиями. При суперэлементном подходе, каждая из организаций разрабатывает КЭ-модель «своей» подсистемы, формирует суперэлемент (СЭ), который представляет собой набор матриц влияния. Далее коллективы расчетчиков обмениваются этими суперэлементами и стыкуют «свою» КЭ-модель с суперэлементом, разработанным и сформированным коллегами. Тем самым обеспечивается переход от исследования полной системы к отдельным подсистемам с корректным учетом динамических характеристик подсистем, разрабатываемых смежниками.

Общая структурная схема методики представлена на рисунке 2.1.

Методика предусматривает две ветви расчета системы:

- 1) без применения суперэлементов (на схеме отмечена белым фоном);
- 2) с применением суперэлементов (на схеме отмечена зеленым фоном).

Первая ветвь. На начальном этапе первой ветви разрабатывается КЭ-модель полной системы: «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун и металлические конструкции покрытия» (блок 1) и составляющих её моделей подсистем. Далее проводится расчет собственных частот и форм колебаний полной системы и подсистем (блок 2). Сопоставление вычисленных собственных частот и форм колебаний и оценка влияния взаимного влияния опорной подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» и подсистемы «металлические конструкции покрытия» (блок 3) на динамические характеристики. При отсутствии совместных форм и незначительном расхождении значений частот колебаний для родственных форм, можно сделать вывод о возможности исследования динамических характеристик системы, а, следовательно, и статическое НДС в рамках отдельных моделей (блок 5). В противном случае необходимо проводить расчет полной системы (блок 4) или воспользоваться суперэлементным подходом – переход во вторую ветвь методики показан на схеме красной стрелкой.

В дальнейшем, производится непосредственно расчет полной системы или отдельных подсистем (в зависимости от наличия/отсутствия взаимного влияния подсистема). Статический расчет (решение СЛАУ) проводится прямым разреженным методом, расчет динамических характеристик (решение проблемы собственных значений) – блочным методом Ланцоша.

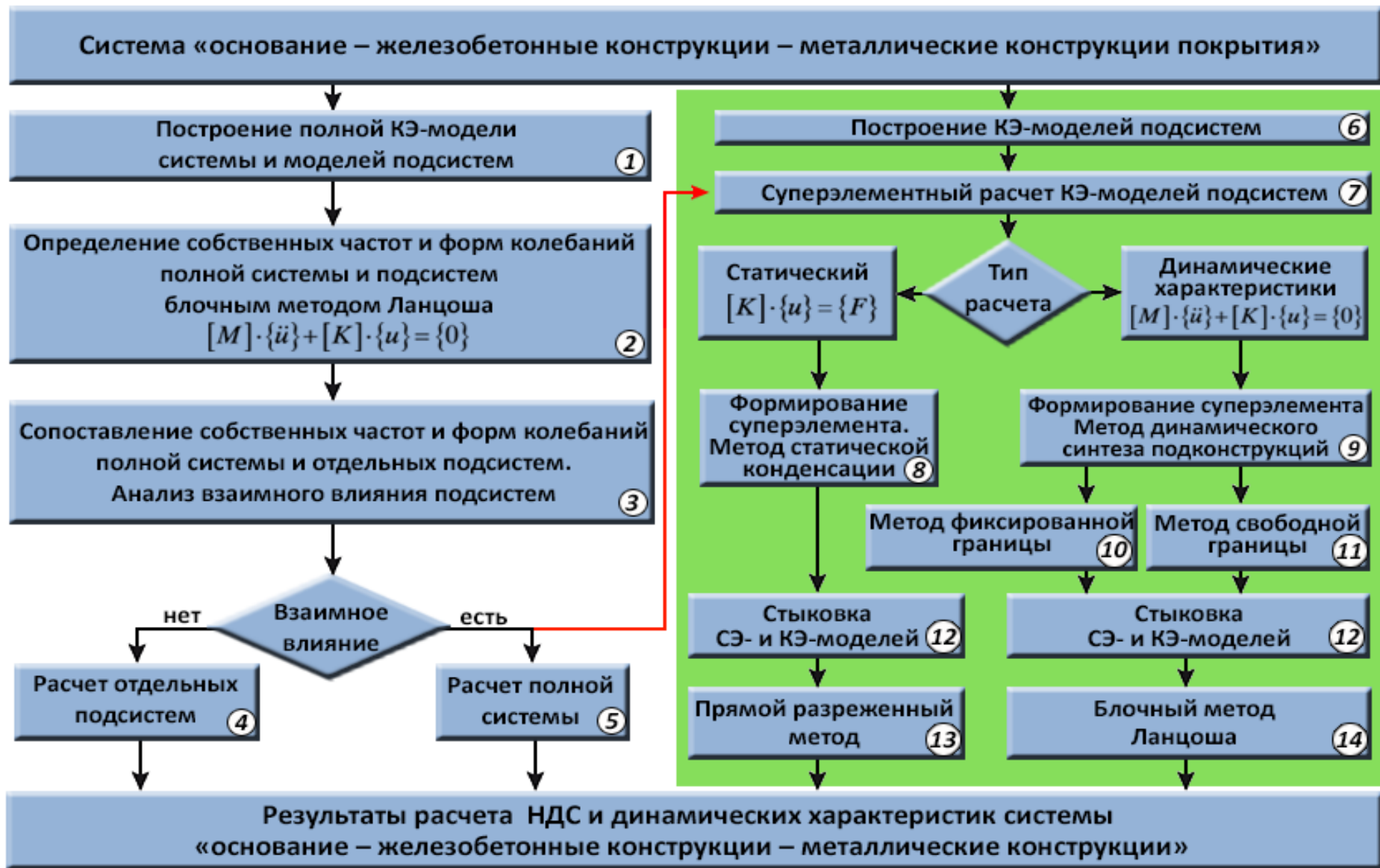


Рисунок.2.1. Общая структурная схема разработанной методики суперэлементного моделирования динамических характеристик систем «основание – железобетонные конструкции – металлические конструкции»

Вторая ветвь. Разрабатываются КЭ-модели подсистем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» и «металлические конструкции покрытия» (блок 6). Построение КЭ-модели полной системы не требуется.

Далее проводится суперэлементный расчет (блок 7) НДС и динамических характеристик КЭ-моделей подсистем состоящий из описанных ниже этапов. В зависимости от типа расчета выбирается соответствующий способ формирования суперэлемента. Для статического расчета используется метод статической конденсации (блок 8), для динамического – метод динамического синтеза подконструкций (блок 9). Метод динамического синтеза подконструкций может быть применен, в рамках предложенной методики, в двух вариантах: метод фиксированной границы (блок 10) или метод свободной границы (блок 11). После формирования суперэлемента одной из подсистем производится его стыковка через граничные узлы с КЭ-моделью второй подсистемы (блок 12).

На следующем шаге производится непосредственно расчет суперэлементной КЭ-модели системы. Статический расчет (решение СЛАУ) проводится прямым разреженным методом (блок 13), расчет динамических характеристик (решение проблемы собственных значений) – блочным методом Ланцоша (блок 14).

Ниже в последующих параграфах настоящей главы приводится более подробное описание основных положений разработанной методики, приведены основные уравнения, описывающие поведение сооружения и их численная аппроксимация. Также дается описание применяемых методов решения систем линейных алгебраических выражений, решения частичной проблемы собственных значений, метода подконструкций, метода динамического синтеза подконструкций. В конце главы приведено описание и возможности реализующего методику программного комплекса, а также данные о собственных разработках автора.

2.2. Основные уравнения поведения сооружения

В данном разделе приведены традиционные и вариационные континуальные, а также дискретные (конечноэлементные) формулировки краевых задач трехмерной нестационарной динамики упругой среды, возникающие в расчетах систем «основание – железобетонные конструкции – металлические конструкции» (с соответствующим обоснованием). В записи указанных континуальных постановок используются тензорные обозначения; уравнения приводятся в индексной форме с учетом традиционных соглашений о суммировании по повторяющимся индексам.

2.2.1. Традиционная и вариационная континуальные постановки трехмерной задачи нестационарной динамики упругой среды

Уравнения динамики упругой среды выводятся из вариационного принципа Даламбера-Лагранжа [67,68].

Введем обозначения:

x_1, x_2, x_3 – декартова система координат; t – время; $u(x_1, x_2, x_3) = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ – вектор перемещений; $\eta_{ik} = \partial u_i / \partial x_j = u_{i,j}$ – тензор дисторции; $\varepsilon_{ij} = (\eta_{ij} + \eta_{ji}) / 2$ – тензор малых деформаций; $\omega_{ij} = (\eta_{ij} - \eta_{ji}) / 2$ – тензор элементарного вращения; σ_{ij} – тензор напряжений; $n(x_1, x_2, x_3) = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$ – единичный вектор внешней нормали.

Характеристики материала:

E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность; λ и G – параметры Ламе,

$$\lambda = E\nu / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)]; \quad G = E / [2(1 + \nu)]. \quad (1)$$

Рассмотрим далее без ограничения общности геометрически и физически линейную постановку задач динамики упругих сред, причем будем полагать среду для наглядности и упрощения соответствующих выкладок однородной и изотропной.

Пусть упругое тело занимает объем V , на границе которого $\partial V = S_u \cup S_p$ заданы граничные условия: на части границы S_u – в перемещениях, на S_p – в напряжениях. Предполагаются известными поля внешних массовых F и поверхностных P сил, распределение перемещений u и скоростей \dot{u} при $t=0$ (начальные условия). При выводе уравнений будем исходить из общего уравнения динамики (вариационного принципа Даламбера-Лагранжа или принципа виртуальной работы).

Принцип виртуальной работы записывается в виде уравнения

$$\delta A_{\text{внутр}} = \delta A_{\text{внеш}},$$

где $\delta A_{\text{внеш}} = \delta A_{\text{внеш}}^{\text{масс}} + \delta A_{\text{внеш}}^{\text{пов}}$ (работа внешних сил равна сумме работ внешних массовых и поверхностных сил).

Заменяя обозначения работы их выражениями, получим уравнение

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_V \rho (F_i - \ddot{u}_i) \delta u_i dv + \int_{S_p} P_i \delta u_i dS. \quad (2)$$

Деформации, перемещения и углы поворота считаются малыми.

Вариация тензора деформаций выражается через вариацию тензора дисторсии следующей зависимостью [67,68]:

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \eta_{kl}} \delta \eta_{kl} = \frac{1}{2} (\delta \eta_{ij} + \delta \eta_{ji}).$$

Вследствие симметричности тензора напряжений имеем:

$$\sigma_{ij} (\delta \eta_{ij} - \delta \eta_{ji}) = 0.$$

Из последних двух равенств получим

$$\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta \eta_{ij}.$$

Таким образом, вариационное уравнение (2.1) приводится к виду:

$$\int_V [\sigma_{ij} \delta \eta_{ij} - (\rho F_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i] dv - \int_{S_p} P_i \delta u_i dS = 0. \quad (3)$$

Связь между напряжениями и деформациями устанавливается на основе закона Гука, который в рассматриваемом простейшем случае имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij}. \quad (4)$$

Добавляя к приведенным соотношениям граничные условия в перемещениях

$$u_i|_{S_u} = u_i^*(x) \quad (5)$$

и начальные условия

$$u_i|_{t=0} = u_i^0(x), \quad \dot{u}_i|_{t=0} = v_i^0(x) \quad (6)$$

получаем полную формулировку начально-краевой задачи теории упругости.

Вариационное уравнение (2.3) эквивалентно системе уравнений движения

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (7)$$

и граничным условиям в напряжениях

$$\sigma_{ik} E_{kj} n_j|_{S_p} = P_i. \quad (8)$$

Таким образом, геометрически и физически линейная задача теории упругости формулируется как система соотношений (3)-(6) (вариационная постановка) или (4)-(8) (традиционная («дифференциальная») постановка (начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных)).

Задача теории упругости в перемещениях сводится к системе уравнений Ламе:

$$(\lambda + G) \text{grad div}(u) + G \Delta u + \rho F = \rho \ddot{u} \quad (9)$$

с начальными и граничными условиями (5), (6), (8).

Для последующего перехода от континуальных постановок задачи к соответствующим дискретным постановкам целесообразно использовать метод конечных элементов (МКЭ). Заметим, что в качестве исходных уравнений для МКЭ могут использоваться как дифференциальные уравнения, так и вариационные принципы в зависимости от метода построения разрешающей системы уравнений [67,68].

2.3. Численная аппроксимация задач линейной теории упругости

2.3.1. Конечноэлементная аппроксимация уравнений поведения сооружения

Для решения описанных выше краевых задач применяется универсальный численный метод механики – метод конечных элементов (МКЭ) [6, 27, 34, 53, 58, 60]. Матричное уравнение движения геометрически линейной системы (малые перемещения и деформации) в форме метода перемещений [6, 34]

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{F(t)\} \quad (10)$$

учитывает кинематические граничные условия и доопределяется начальными условиями (из решения статической задачи при $t=t_0$). Здесь $[M]$, $[C]$ и $[K]$ – симметричные блочно-редкозаполненные матрицы масс, демпфирования, жесткости конечноэлементной модели системы, t – время, “точка” означает дифференцирование по времени, $\{F(t)\}$ – вектор заданных статических и динамических нагрузок, $\{u(t)\}$ – искомый вектор обобщенных динамических перемещений.

Приведенная общая динамическая постановка естественным образом сводится к важным частным задачам – статической, на собственные значения (собственные частоты и формы колебаний и критические числа и формы потери начальной устойчивости) и спектральной формулировки динамических задач – при соответствующем виде нагрузок и решений путем обнуления незначимых матриц.

2.3.2. Алгоритмы решения системы линейных алгебраических уравнений

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) статического равновесия

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\}, \quad (11)$$

где $\{u\}$ – вектор узловых перемещений, $[K]$ – глобальная матрица жесткости, $\{F\}$ – глобальный вектор нагрузок.

Ниже приведены наиболее эффективные универсальные подходы решения систем линейных алгебраических уравнений.

2.3.2.1. Прямой разреженный метод (блок 14, рисунок 2.1)

Прямой разреженный метод (блок 14, рисунок 2.1) является эффективным вариантом прямого метода Гаусса для положительно определенных симметричных блочно-редкозаполненных матриц – модифицированная схема квадратного корня (Холецкого) [6, 7, 34, 48].

Система линейных дискретных уравнений, описывающих статическое состояние исследуемой конструкции решается с применением треугольного разложения матрицы $[K]$:

$$[L][U]\{u\} = \{F\}, \quad (12)$$

где $[L]$ – верхняя треугольная матрица, $[U]$ – нижняя треугольная матрица, $\{u\}$ – глобальный вектор неизвестных; $\{F\}$ – глобальный вектор нагрузок.

Используя замену:

$$\{w\} = [U]\{u\} \quad (13)$$

решаем полученную СЛАУ относительно $\{w\}$:

$$[L]\{w\} = \{F\}. \quad (14)$$

затем вычисляем вектор $\{u\}$ (искомый вектор неизвестных) с применением процедуры обратной замены:

$$[U]\{u\} = \{w\}. \quad (15)$$

В том случае, если матрица жесткости $[K]$ симметрична, ее можно записать в виде:

$$[K] = [L] \cdot [L]^T \quad (16)$$

или

$$[K] = [L'] \cdot [D][L']^T \quad (17)$$

где $[D]$ – диагональная матрица, элементы которой могут быть отрицательными для некоторых нелинейных задач, что позволяет сформировать матрицу $[L']$ без учета квадратного корня из отрицательного числа. Поэтому уравнения (9)-(12) можно представить в виде:

$$[L'] \cdot [D] \cdot [L']^T \cdot \{u\} = \{F\}, \quad (18)$$

$$\{w\} = [D] \cdot [L']^T \{u\}, \quad (19)$$

$$[L'] \cdot \{w\} = \{F\}, \quad (20)$$

$$[D] \cdot [L']^T \cdot \{u\} = \{F\}. \quad (21)$$

В том случае, когда матрица $[K]$ редко заполненная с коэффициентами, в основном, расположенными вокруг главной диагонали, *прямой разреженный метод* предназначен для обработки только ненулевых элементов матрицы $[K]$. В целом, в ходе разложения Холецкого матрицы $[K]$, (9) или (15), матрицы $[L]$ или $[L']$ заполняются ненулевыми коэффициентами, расположенными на нулевых позициях матрицы $[K]$. Эффективность *прямого разреженного метода* заключается в максимальной оптимизации выше описанного алгоритма.

2.3.2.2. Итерационные алгоритмы решения СЛАУ

Система линейных алгебраических уравнений решается (22) итерационно, при этом итерации имеют следующий вид:

$$u^{n+1} = u^n + u', \quad (23)$$

$$Ku' = r^n, \quad (24)$$

$$r^n = f - Ku^n, \quad (25)$$

где r^n – невязки на n -й итерации.

Итерационный метод сопряженных градиентов с предобуславливанием (PCG) является эффективным и надежным для всех типов расчетов. PCG метод применим только для симметричных матриц жесткости.

Решается основная система линейных уравнений (22). Вектор узловых перемещений ищется в виде:

$$\{u\} = \alpha_1 \cdot \{p_1\} + \alpha_2 \cdot \{p_2\} + \dots + \alpha_m \cdot \{p_m\}, \quad (26)$$

где $m \leq n$, где n – размер матрицы.

2.3.3. Алгоритмы решения частной проблемы собственных значений

Уравнение движения для задач определения собственных частот и форм колебаний без учета демпфирования имеет вид:

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = \{0\}. \quad (27)$$

Для линейных систем свободные колебания являются гармоническими:

$$\{u\} = \{\varphi\}_i \cdot \cos \omega_i t, \quad (28)$$

где:

$\{\varphi\}_i$ – собственный вектор, соответствующий i -ой собственной частоте;

ω_i – i -я собственная циклическая частота (радиан в единицу времени);

t – время.

Таким образом, уравнение (27) примет вид:

$$(-\omega_i^2 \cdot [M] + [K]) \cdot \{\varphi\}_i = \{0\}. \quad (29)$$

Нетривиальным решением (2.29) является:

$$[[K] - \omega^2 \cdot [M]] = 0. \quad (30)$$

Через полученные значения циклических частот собственных колебаний $\{\omega\}$ можно выразить частоты собственных колебаний $\{f\}$:

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}. \quad (31)$$

Для решения большой симметричной проблемы собственных значений применяют методы итераций в подпространстве, прямой блочный метод Ланцоша, метод Ланцоша с предобуславливанием (PCG), несимметричный метод и др.

Ниже приведено краткое описание прямого блочного метода Ланцоша и метода Ланцоша с предобуславливанием, как наиболее эффективных способов решения частичной проблемы собственных значений.

Прямой блочный метод Ланцоша

Прямой блочный метод Ланцоша (блок 14, рисунок 2.1) [87] применяется для больших симметричных проблем собственных значений.

Алгоритм блочного метода Ланцоша со сдвигом является вариацией классического алгоритма метода Ланцоша, где рекурсии выполняются с использованием блока векторов вместо одного вектора. Классический метод Ланцоша подробно описан в [114]. В блочном методе Ланцоша используется автоматическая стратегия сдвига для получения требуемого количества собственных значений. Для получения требуемого количества собственных векторов в модальном анализе блочный метод Ланцоша применяется совместно с проверкой последовательности Штурма. Следует отметить, что блочная версия алгоритма позволяет сократить медленные операции ввода-вывода по сравнению с классической (неблочной) версией. Введение сдвигов существенно улучшает сходимость.

Альтернативой блочному методу Ланцоша является итерационный метод Ланцоша с предобуславливанием, требующий меньше вычислительных затрат. Теоретические выкладки по этому методу приведены в работе [87]. Несмотря на то, что данный метод основан на блочном методе Ланцоша, их реализация несколько отличается:

- Значение сдвига в ходе вычислений остается неизменным;
- По умолчанию не выполняется проверка последовательности Штурма;
- Не применим к задачам на устойчивость.

2.3.4. Метод суперэлементов

Метод суперэлементов (блок 7, рисунок 2.1), или метод подконструкций – это процедура, при которой группа конечных элементов объединяется в один элемент, представленный в виде матрицы. Одноматричный элемент называется суперэлементом. Суперэлемент может быть использован в расчете, как конечный элемент любого другого типа. В данном исследовании применяются два варианта суперэлементных подходов:

- Метод статической конденсации (блок 8, рисунок 2.1). Наиболее часто используется для статических расчетов.
- Метод динамического синтеза подконструкций. Применяется для динамического расчета (блок 9, рисунок 2.1).

2.3.4.1. Метод статической конденсации (редукция Гайана)

В общей схеме, разработанной суперэлементной методике применение метода статической конденсации предусмотрено в блоке 8 (см. рисунок 2.1).

Для задач *статики* решается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{u\} = \{F\}, \quad (32)$$

где $\{F\}$ – вектор нагрузок. Уравнения могут быть разделены на две группы, по степеням свободы узлов:

$$\begin{bmatrix} [K_{mm}] & [K_{ms}] \\ [K_{sm}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_m\} \\ \{u_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_m\} \\ \{F_s\} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

или

$$[K_{mm}]\{u_m\} + [K_{ms}]\{u_s\} = \{F_m\}, \quad (34)$$

$$[K_{sm}]\{u_m\} + [K_{ss}]\{u_s\} = \{F_s\}. \quad (35)$$

В данной записи степени свободы внешних узлов (узлов по которым происходит стыковка суперэлемента и остальной системы) подконструкции (суперэлемента) обозначаются индексом “m” (сокращение от master), для остальных, внутренних узлов, входящих в состав суперэлемента, – “s” (slave).

Решая уравнение (35) относительно $\{u_s\}$,

$$\{u_s\} = [K_{ss}]^{-1} \{F_s\} - [K_{ss}]^{-1} [K_{sm}]\{u_m\} \quad (36)$$

и подставляя $\{u_s\}$ в (2.34), получим:

$$\left[[K_{mm}] - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \right] \{u_m\} = \{F_m\} - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1} \{F_s\} \quad (37)$$

или

$$[\hat{K}]\{\hat{u}\} = \{\hat{F}\}, \quad (38)$$

где

$$[\hat{K}] = [K_{mm}] - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}], \quad (39)$$

$$\{\hat{F}\} = \{F_m\} - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1} \{F_s\}, \quad (40)$$

$$\{\hat{u}\} = \{u_m\}, \quad (41)$$

$[\hat{K}]$ и $\{\hat{F}\}$ – матрица жесткости и вектор нагрузки суперэлемента соответственно.

Это преобразование эквивалентно редукции вектора перемещений узлов:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{u_m\} \\ \{u_s\} \end{Bmatrix} = [T]\{\hat{u}\}, \quad (42)$$

где $[T]$ – матрица трансформации, имеющая следующий вид:

$$[T] = \begin{bmatrix} [I] \\ [G_{sm}] \end{bmatrix}, \quad (43)$$

где $[G_{sm}] = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]$, $[I]$ – единичная матрица.

Следовательно:

$$[\hat{K}] = [T]^T [K] [T], \quad (44)$$

$$\{\hat{F}\} = [T]^T \{F\}. \quad (45)$$

С учетом того, что элементами вектора нагрузки могут быть векторы температурной нагрузки, давления, гравитационной нагрузки и др. для получения результатов расчета для внутренних узлов суперэлемента разрешающие уравнения для $\{u_s\}$ (36) записываются следующим образом:

$$\{u_s\} = [K_{ss}]^{-1} \sum_{i=1}^N b_i \{F_{si}\} - [K_{ss}]^{-1} [K_{sm}] \{u_m\}, \quad (46)$$

где b_i – масштабный коэффициент, $\{F_{si}\}$ – вектор i -ого типа нагрузки.

Возможен вариант статической конденсации для динамических расчетов. Для задач динамики разрешающую систему алгебраических уравнений можно записать как:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}. \quad (47)$$

Для подконструкции (суперэлемента) уравнение имеет следующий вид:

$$[\hat{M}]\{\ddot{\hat{u}}\} + [\hat{C}]\{\dot{\hat{u}}\} + [\hat{K}]\{\hat{u}\} = \{\hat{F}\}. \quad (48)$$

Матрицы $[\hat{K}]$ и $\{\hat{F}\}$ вычисляются так же, как и для задач статики (уравнения 39 и 40 или 44 и 45). Как предложено Гайаном в [26] матрица масс

также редуцируется с использованием матрицы трансформации (49).

Редуцированная матрица масс вычисляется следующим образом:

$$[\hat{M}] = [M_{mm}] + [M_{ms}][G_{sm}] + [G_{ms}]([M_{sm}] + [M_{ss}][G_{sm}]), \quad (50)$$

где $[G_{ms}] = [G_{sm}]^T$.

Матрица демпфирования определяется аналогично:

$$[\hat{C}] = [C_{mm}] + [C_{ms}][G_{sm}] + [G_{ms}]([C_{sm}] + [C_{ss}][G_{sm}]). \quad (51)$$

2.3.4.2. Метод динамического синтеза подконструкций

Метод динамического синтеза подконструкций (блок 9, рисунок 2.1), так же, как и метод статической конденсации основан на разделении большой задачи на несколько отдельных задач меньшего размера. Преимущество метода динамического синтеза подконструкций состоит в том, что он позволяет более точно, моделировать поведение конструкции при динамических воздействиях. Достигается это за счет учета урезанных наборов обобщенных координат форм колебаний, определенных для каждой подконструкции (суперэлемента) исследуемой системы. Существуют различные варианты методов динамического синтеза подконструкций, отличающихся типом граничных условий в граничных узлах и, соответственно, наборами учитываемых внутренних форм колебаний суперэлемента: *методы фиксированной границы* (блок 10, рисунок 2.1), *методы свободной границы* (блок 11, рисунок 2.1), *метод смешанных границ*, *метод нагруженных границ*.

Выбор варианта метода динамического синтеза подконструкций основан на том, чтобы в рассматриваемых подсистемах стыковочным узлам были назначены граничные условия, при которых собственные частоты колебаний максимально соответствовали поведению реальной конструкции. Для подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» узлы стыковки с покрытием следует оставить не закрепленными, т.к. подсистема «металлические конструкции покрытия» обладает существенной гибкостью. Потому для опорной подсистемы имеет смысл применить метод свободной границы. Для подсистемы

«металлические конструкции покрытия» наиболее «физично» было бы закрепить стыковочные узлы, в которых производится соединение с опорной подсистемой, так как. Опорная подсистема существенно более жесткая. Соответственно в таком случае для этой подсистемы «металлические конструкции покрытия» лучше подойдет метод фиксированной границы.

Каждая подконструкция в методе динамического синтеза определяется матрицами жесткости, масс и демпфирования. Матричное уравнение движения имеет вид:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}. \quad (52)$$

Разделим эти уравнения в соответствии с внешними и внутренними степенями свободы:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix}, [M] = \begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} C_{mm} & C_{ms} \\ C_{sm} & C_{ss} \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix}, \{F\} = \begin{Bmatrix} F_m \\ F_s \end{Bmatrix}. \quad (53)$$

где m – основные степени свободы, только для граничных, внешних узлов; s – все остальные степени свободы.

Аналогично уравнению (42) вектор физических перемещений $\{u\}$ может быть покомпонентно представлен в обобщенных координатах [80]

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_m \\ y_\delta \end{Bmatrix}, \quad (54)$$

где: y_δ – усеченный набор обобщенных модальных координат, $[T]$ – матрица преобразования.

Метод фиксированной границы

Для данного метода (блок 10, рисунок 2.1) матрица преобразования определяется как:

$$[T] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [G_{sm}] & [\Phi_s] \end{bmatrix}, \quad (55)$$

где: $[G_{sm}] = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]$ – избыточные статические граничные формы, $[\Phi_s]$ – нормальные собственные формы колебаний подконструкции с фиксированными границами.

Нормальные формы колебаний – это собственные формы колебаний, соответствующие ненулевым собственным частотам при решении частичной проблемы собственных значений

$$[K][\phi_k^N] = [\Omega^2][M][\phi_k^N]. \quad (56)$$

Усечённый набор нормальных форм обозначен как $[\phi_k^N]$ и содержат k нормальных форм.

Ограничительные формы определяются как перемещения внутренних степеней свободы подконструкции от единичных перемещений каждой граничной степени свободы из набора при закреплении всех остальных этого набора. Процедура нахождения ограничительных форм эквивалентна применению редукции (статической конденсации) Гайана для внутренних степеней свободы.

$$[\Psi_m^C] = \begin{bmatrix} I_{mm} \\ -K_{ss}^{-1}K_{sm} \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Набор ограничительных форм обозначен как $[\Psi_m^C]$ и содержит m векторов. Верхний индекс C указывает на то, что это набор именно ограничительные формы.

Метод свободной границы

Для метода свободной границы (блок 11, рисунок 2.1), который также обычно называют методом Гертинга (см. Herting [91], Hintz [92]), матрица преобразования имеет вид:

$$[T] = \begin{bmatrix} [I] & 0 & 0 \\ [G_{sm}] & [\Phi_{sr}] & [\hat{\Phi}_s] \end{bmatrix}, \quad (58)$$

где: $[\hat{\Phi}_s] = [[\Phi_s] - [G_{sm}][\Phi_m]]$, $[\Phi_m]$ – матрица набора внешних степеней свобод нормальных форм колебаний при свободной границе (собственные вектора получены при незакрепленных внешних узлах), $[\Phi_s]$ – матрица набора внутренних степеней свобод нормальных форм колебаний при свободной границе, $[\Phi_{sr}]$ – матрица форм компенсации инерции, $[\Phi_{sr}]$ включена только в том случае, если присутствуют колебания жесткого тела. Любые присутствующие формы

колебаний жесткого тела не включены в $[\hat{\Phi}_s]$, $[\Phi_{sr}] = [K_{ss}]^{-1} [[M_{sm}] + [M_{ss}][G_{sm}]] [\Psi_{mr}]$ где $[\Psi_{mr}]$ – матрица набора внешних степеней свобод форм колебания твёрдого тела.

В данном методе помимо нормальных и ограничительных форм, описанных выше, используется ещё два набора форм:

1) *Формы колебаний твёрдого тела* – формы колебаний, при которых подконструкция перемещается как твёрдое тело, не деформируясь.

$$[K]\{\Psi_{mr}\} = \{0\}. \quad (59)$$

2) *Формы компенсации инерции*. В случае присутствия для подконструкции форм колебаний твёрдого тела для определения стыковочных форм используется специальная процедура, предложенная Макнилом в [102].

Формирование редуцированных матриц

После подстановки преобразования (54) в матричное уравнение движения (52), получим уравнение движения в редуцированном пространстве. Редуцированные матрицы жесткости, массы и демпфирования и редуцированный вектор нагрузки подконструкции будут иметь вид:

$$[\hat{K}] = [T]^T [K] [T], \quad (60)$$

$$[\hat{M}] = [T]^T [M] [T], \quad (61)$$

$$[\hat{C}] = [T]^T [C] [T], \quad (62)$$

$$\{\hat{F}\} = [T]^T \{F\}. \quad (63)$$

Для метода фиксированной границы, при условии, что нормальные формы колебаний нормированы по массе, редуцированные матрицы жесткости, масс и демпфирования и редуцированный вектор нагрузки имеют окончательный вид:

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} [K_{mm}] + [K_{ms}][G_{sm}] & [0] \\ [0] & [\Lambda^2] \end{bmatrix}, \quad (64)$$

$$[\hat{M}] = \begin{bmatrix} [M_{mm}] + [M_{ms}][G_{sm}] + [G_{ms}][[M_{sm}] + [M_{ss}][G_{sm}]] & [[M_{ms}] + [G_{ms}][M_{ss}]][\Phi_s] \\ [\Phi_s]^T [[M_{sm}] + [M_{ss}][G_{sm}]] & [I] \end{bmatrix}, \quad (65)$$

$$[\hat{C}] = \begin{bmatrix} [C_{mm}] + [C_{ms}][G_{sm}] + [G_{ms}][[C_{sm}] + [C_{ss}][G_{sm}]] & [[C_{ms}] + [G_{ms}][C_{ss}]][\Phi_s] \\ [\Phi_s]^T [[C_{sm}] + [C_{ss}][G_{sm}]] & [\Phi_s]^T [C_{ss}][\Phi_s] \end{bmatrix}, \quad (66)$$

$$\{\hat{F}\} = \begin{Bmatrix} \{F_m\} + [G_{ms}]\{F_s\} \\ [\Phi_s]^T \{F_s\} \end{Bmatrix}, \quad (67)$$

где $[\Lambda^2]$ диагональная матрица, содержащая собственные значения сохраненных нормальных форм колебаний при фиксированной границе.

Вычисление перемещений во внутренних узлах подконструкции

Перемещения во внутренних узлах подконструкции $\{u_s\}$ восстанавливаются путем выражения их из нижней части уравнения (54).

Для метода фиксированной границы:

$$\{u_s\} = [G_{sm}]\{u_m\} + [\phi_s]\{y_\delta\}. \quad (68)$$

Приведенное уравнение (68), также используются и для метода свободной границы, за исключением того что $[\phi_s]$ необходимо заменить на $[[\phi_{sr}][\hat{\phi}_s]]$.

2.4. Программная реализация разработанной методики

2.4.1. Базовое программное обеспечение

Верификационные и апробационные исследования проводились на базе Научно-исследовательского центра СтаДиО (ЗАО НИЦ СтаДиО). В качестве базового, выбран лицензионный универсальный программный комплекс (ПК) ANSYS Mechanical. Универсальный "тяжелый" программный комплекс ANSYS Mechanical существует и развивается на протяжении последних 30 лет, является сертифицированным по основным зарубежным и отечественным стандартам (ISO-9001, ISO 9000-3, NAFEMS QA certification, Lloyd's Register's software certification, British standard BS 5750, The TickIT initiative, Госатомнадзора России, Морского Регистра России и др.).

ПК ANSYS Mechanical прошел процедуру верификации в системе и согласно требованиям Российской академии архитектуры и строительных наук [22] (свидетельство РААСН №02/ANSYS/2010). Верификация проведена сотрудниками ЗАО НИЦ СтаДиО и НОЦ КМ МГСУ. Автор диссертации является одним из членов авторского коллектива верификационного отчета.

2.4.1.1. Возможности и структура базового ПК

ПК ANSYS Mechanical позволяет решать инженерные и наукоемкие линейные и нелинейные, стационарные и нестационарные пространственные задачи механики деформируемого твёрдого тела (включая нестационарные физически и геометрически нелинейные задачи контактного взаимодействия элементов конструкций), задач механики жидкости и газа, механики связанных полей, теплообмена и теплопередачи, а также акустики и электродинамики [70, 71].

ANSYS Mechanical состоит из трех функциональных модулей:

- ANSYS-Pre – препроцессор. Предназначен для создания геометрической и КЭ-моделей, задания физических параметров материалов, определения граничных и начальных условий;

- ANSYS-Solver – решатель. Предназначен для задания типа расчета, задания параметров расчета, выбора численных схем, определения количества итераций на шаге по времени и проведения;
- ANSYS-Post – постпроцессор. Применяется для визуализации результатов в заданном виде: изображений, анимации, графиков и таблиц.

Для оптимизации процесса проведения расчетных исследований геометрические и КЭ-модели конструкций создаются с использованием программ, написанных на встроенном языке программирования APDL.

2.4.1.2. Библиотека конечных элементов

Программный комплекс ANSYS Mechanical содержит представительную библиотеку конечных элементов [64, 65]. Ниже, в таблице 2.1, приведено краткое описание типов элементов необходимых для моделирования систем «основание – железобетонные конструкции – металлические конструкции покрытия».

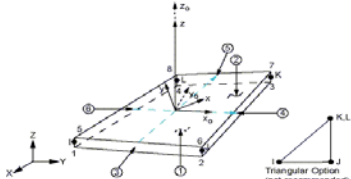
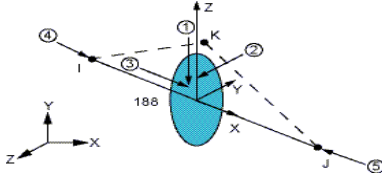
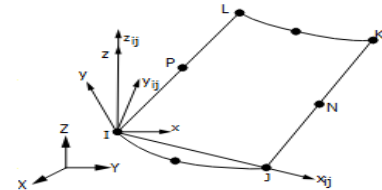

Для моделирования фундаментной плиты, стен, перекрытий, лестничных и лифтовых шахт, гребенки трибун, балок под гребенкой трибун используются четырёхугольные и треугольные в плане КЭ оболочки типа SHELL181. Балки и колонны моделируются стержневыми КЭ типа BEAM188. Конечные элементы типа MPC184 с опцией «жёсткая балка» вводятся в местах стыковки плит перекрытий и фундаментной плиты с колоннами, а учитывающие эксцентриситеты – в местах стыковки опорных конструкций покрытия с железобетонными конструкциями.

Сваи моделируются специальными конечными элементами типа COMBIN14. Несущие элементы конструкции покрытия моделируются в основном с использованием элементов типа BEAM188. Для стержней ферм применяются элементы типа LINK180, Оболочка покрытия моделируется элементами SHELL181. Для задания нагрузок на кровлю, а также на наклонные лестничные марши используются элементы типа SURF154.

Элемент MATRIX50 – суперэлемент/подконструкция формируется на этапе генерации в суперэлементном расчете. Представляет собой группу

предварительно собранных конечных элементов, которая рассматривается в качестве отдельного элемента и представлена редуцированными матрицами влияния.

Таблица 2.1. Конечные элементы, применяемые для моделирования систем "основание – железобетонные конструкции – металлические конструкции покрытия"

№ n/n	Тип элемента	Описание элемента	Схема
1	SHELL181	3-х или 4-х узловой оболочечный элемент, реализующий теорию Миндлина-Рейсснера	
2	BEAM188	2-х узловой пространственный балочный элемент, реализующий теорию Тимошенко. 3-й узле необходим для ориентации сечения в пространстве.	
3	MPC184	Элемент кинематических ограничений.	-
4	SURF154	Элемент поверхностных эффектов. Количество узлов элемента зависит от типа конечного элемента к которому он применяется.	
5	LINK180	2-х узловой пространственный стержневой элемент, работающий на растяжение или сжатие. Имеет три степени свободы в каждом узле: перемещения в направлении осей X, Y и Z узловой системы координат	
6	COMBIN14	Специальный элемент пружины с заданной жесткостью в направлении глобальной оси z. 2-х узловой с тремя степенями свободы в каждом узле (перемещения в направлении осей X, Y и Z узловой системы координат)	-
7	MATRIX50	Суперэлемент (подконструкция) – группа предварительно собранных конечных элементов, которая рассматривается в качестве отдельного элемента и представлена редуцированными матрицами влияния	-

Для задания шарнирного опирания в местах устройства деформационных швов использовались связи по степеням свободы – СР.

2.4.1.3. Решение СЛАУ

ПК ANSYS Mechanical имеет в своем функционале различные методы для решения систем линейных уравнений:

- прямые
- разреженный
- итерационные
- сопряженных градиентов с предобуславливанием
- сопряженных градиентов Якоби
- сопряженных градиентов с неполным разложением Холецкого)

В рамках настоящей работы решение СЛАУ выполняется прямым разреженным методом (блок 13, рисунок 2.1) как наиболее эффективным, однако в разработанной методике, как альтернативные, могут быть использованы и другие методы решения СЛАУ.

2.4.1.4. Решение проблемы собственных значений

Проблема собственных частот и форм колебаний может быть решена рядом методов, реализованных в ПК ANSYS Mechanical:

- Прямой блочный метод Ланцоша;
- Метод Ланцоша с предобуславливанием;
- Метод суперузлов;
- Метод итераций в подпространстве;
- Несимметричный метод;
- Метод демпфирования;
- QR-разложение для задач с демпфированием.

В рамках настоящего исследования для решения большой симметричной проблемы собственных значений применялся *прямой блочный метод Ланцоша*, имеющий более быструю сходимость, чем метод итераций в подпространстве

(блок 14, рисунок 2.1), метод Ланцоша с предобуславливанием и метод суперузлов. Несимметричный метод и методы с демпфированием не использовались в силу того, что в рассматриваемых задачах матрицы влияния являются симметричными и системы без демпфирования.

2.4.1.5. Суперэлементные алгоритмы, реализованные в ANSYS Mechanical



В ПК ANSYS Mechanical реализован метод подконструкций, основанный на статической конденсации Гайана (блок 8, рисунок 2.1), а также три вида методов динамического синтеза подконструкций (блок 9, рисунок 2.1):

- Метод фиксированной границы (блок 10, рисунок 2.1);
- Метод свободной границы (блок 11, рисунок 2.1);
- Метод остаточной гибкости свободной границы.

2.4.2. Собственные программные разработки

При проведении расчетных исследований, подробно описанных в последующих главах (глава 3 – верификационных, и глава 4 – апробационных) с помощью встроенного в ПК ANSYS Mechanical языка программирования APDL автором разработана программа для ЭВМ «Расчет параметров НДС и динамических характеристик комбинированной большепролетной системы несущих конструкций футбольного стадиона с применением суперэлементного подхода Stadium_CMS.mac», позволяющая оптимизировать процесс создания расчетных КЭ-моделей, задание параметров расчета и обработку полученных результатов. Программа для ЭВМ зарегистрирована в Федеральном государственном бюджетном учреждении «Федеральный институт промышленной собственности Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам» (ФГБУ ФИПС). Краткое описание составляющих её модулей (подпрограмм) и их назначение приведено в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Краткое описание собственных программных разработок.

<i>Базовый ПК ANSYS Mechanical</i>	<i>Подпрограммы, параметризация расчетов</i>
 <p>Препроцессор ANSYS-Pre</p>	<i>Tuning_fork.mac</i> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Создание объемных КЭ-модели камертона</i> • <i>Задание физических параметров материалов</i> • <i>Задание граничных и начальных условий</i>
	<i>Block TC.mac</i> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Создание объемных КЭ-модели входного блока</i> • <i>Задание физических параметров материалов</i> • <i>Задание граничных и начальных условий</i>
	<i>Stadium NN.mac</i> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Создание геометрической и КЭ-модели стадиона в Нижнем Новгороде</i> • <i>Задание физических параметров материалов</i> • <i>Задание граничных и начальных условий</i>
	<i>Stadium RND.mac</i> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Создание геометрической и КЭ-модели стадиона в Ростове-на-Дону</i> • <i>Задание физических параметров материалов</i> • <i>Задание граничных и начальных условий</i>
 <p>«Решатель» ANSYS-Solver</p>	<i>Tuning_fork_cms.mac</i> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Задание параметров расчета собственных частот и форм колебаний камертона</i> • <i>Расчет собственных частот и форм колебаний с /без учетом суперэлемента</i>
	<i>Block TC_cms.mac</i> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Задание параметров расчета собственных частот и форм колебаний входного блока</i> • <i>Расчет собственных частот и форм колебаний</i>
	<i>Stadium NN_cms.mac</i> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Задание параметров расчета собственных частот и форм колебаний стадиона в Нижнем Новгороде</i> • <i>Расчет собственных частот и форм колебаний с /без учетом суперэлемента</i>
	<i>Stadium RND_cms.mac</i> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Задание параметров расчета собственных частот и форм колебаний стадиона в Ростове-на-Дону</i> • <i>Расчет собственных частот и форм колебаний с /без учетом суперэлемента</i>
 <p>Постпроцессор ANSYS-Post</p>	<i>Tuning_fork.mac</i> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Визуализация и обработка результатов расчетов в виде изображений, видео, графиков и таблиц</i>
	<i>Block TC_res.mac</i> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Визуализация и обработка результатов расчетов в виде изображений, видео, графиков и таблиц</i>
	<i>Stadium NN_res.mac</i> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Визуализация и обработка результатов расчетов в виде изображений, видео, графиков и таблиц</i>
	<i>Stadium RND_res.mac</i> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Визуализация и обработка результатов расчетов в виде изображений, видео, графиков и таблиц</i>

2.5. Выводы по главе 2

1) Предложена и теоретически обоснована методика суперэлементного моделирования динамических характеристик комбинированных большеразмерных систем «основание – железобетонные конструкции – металлические конструкции покрытия» объектов уникального строительства.

2) Методика реализована на основе универсального («тяжелого») верифицированного программного комплекса численного моделирования ANSYS Mechanical и собственных программных разработок автора.

3) Методика базируется на подробных большеразмерных пространственных динамических конечноэлементных моделях (с использованием представительной «библиотеки конечных элементов», совместимых в единой КЭ-модели), а также реализует современные подходы математического моделирования, включая суперэлементные технологии.

4) В ходе верификации на представительных задачах (глава 3) и апробации на реальных объектах (глава 4) предполагается выявить возможности и ограничения разработанной методики суперэлементного моделирования динамических характеристик систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» футбольных стадионов.

ГЛАВА 3. ВЕРИФИКАЦИЯ СУПЕРЭЛЕМЕНТНОЙ МЕТОДИКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ «ОСНОВАНИЕ – ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ – МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ПОКРЫТИЯ»

3.1. Обоснование выбора верификационных задач

Верификационные примеры выбраны таким образом, чтобы продемонстрировать и оценить возможности и эффективность разработанной суперэлементной методики [52].

В качестве первого верификационного примера выбрана задача из оригинального верификационного отчета ПК ANSYS Mechanical. Этот пример демонстрирует возможности метода динамического синтеза подконструкций, также в нем исследуются особенности использования различных методов учета внутренних форм колебания подконструкции.

В качестве второго примера рассмотрен реальный объект – входной блок ТЦ «Волгамолл» в г. Волжский, имеющий конструкцию, схожую с исследуемым типом большеразмерных систем. На этом примере проводится анализ:

– влияния подробности КЭ-модели (сетки конечных элементов) на точность вычисленных динамических характеристик сооружения, а также на «машинное» время, затраченное на вычисления.

– возможности перехода к расчету динамических характеристик подсистем в рамках отдельных моделей «основание – железобетонные конструкции каркаса» и «металлоконструкции покрытия»;

– возможности и особенности применения метода динамического синтеза подконструкций к расчетам такого рода комбинированных систем. Анализируется влияние выбора метода учета внутренних форм колебаний подконструкции и количество учитываемых внутренних собственных частот и форм колебаний подконструкции.

– «организационной» и вычислительной эффективности предложенных вариантов разработанной суперэлементной методики.

3.2.1. Расчетные КЭ-модели

В данном верификационном примере решается задача определения собственных частот и форм колебаний камертона. Расчет проводился с использованием полной КЭ-модели камертона и суперэлементной модели с применением нескольких вариантов метода динамического синтеза подконструкций. Производится сравнение с результатов расчётов.

Геометрические характеристики камертона показаны на рисунке 3.1. Физические характеристики камертона приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Физические характеристики камертона

Характеристика, обозначение	Величина, единицы измерения
Модуль упругости, E	$1,9 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$
Коэффициент Пуассона, ν	0,3
Плотность, ρ	$7,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$

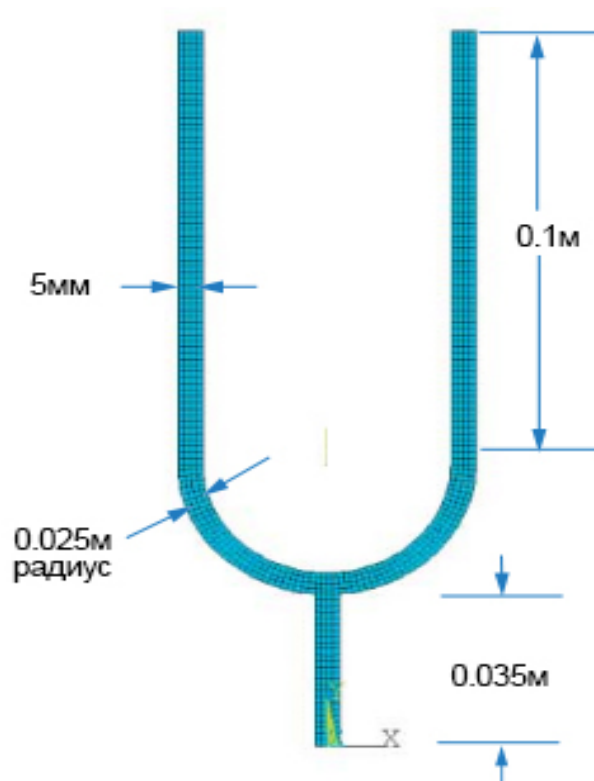


Рисунок 3.1. Геометрические характеристики камертона. Полной КЭ-модель незакрепленного камертона. Толщина (из плоскости) камертона $t = 5\text{мм}$

Задача решалась в плоской постановке (плосконапряжённое состояние с указанием толщины).

Характерные размеры конечных элементов, вычислительная размерность задачи (число степеней свободы) и количество узлов и КЭ отображены в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Характерные размеры конечных элементов, вычислительная размерность задачи (число степеней свободы) и количество узлов и конечных элементов модели камертона

№	Тип КЭ	Число степеней свободы	Размеры элементов, м	Узлы×КЭ
1	<i>PLANE42</i>	2340	0,00125	1170×932

В данном тестовом примере применялся КЭ типа *PLANE42* – двумерный элемент, применяемый для задач плоского напряженного или деформированного состояния. Исходные данные необходимые для задания элемента: четыре узла (по две степени свободы в каждом), толщина и свойства материала.

MATRIX50 (суперэлемент/подконструкция) – совокупность конечных элементов, рассматриваемая как отдельный элемент и представляет собой редуцированные матрицы (жесткости, масс, нагрузок).

Методика расчёта

Расчет проводился 4-мя способами.

- 1) Расчет полной модели камертона
- 2) Расчет с помощью суперэлементного подхода. Использованы 3 варианта метода динамического синтеза, реализованных в ПК ANSYS Mechanical:

- метод фиксированной границы;
- метод свободной границы;
- метод остаточной гибкости свободной границы.

Определение собственных частот и собственных форм колебаний проводилось блочным методом Ланцоша. Вычислены 10 низших собственных частот и форм колебаний системы, при этом для каждой из 3-х подконструкций определялись также 10 низших частот и форм.

Схема разделения модели камертона на суперэлементы показана на рисунке 3.2. Общий вид суперэлементной модели с указанием стыковочных узлов показан на рисунке 3.3. На рисунке 3.4 показан увеличенный фрагмент модели в месте соединения суперэлементов. На рисунке 3.5 показан увеличенный фрагмент суперэлементной модели с указанием границ суперэлементов.

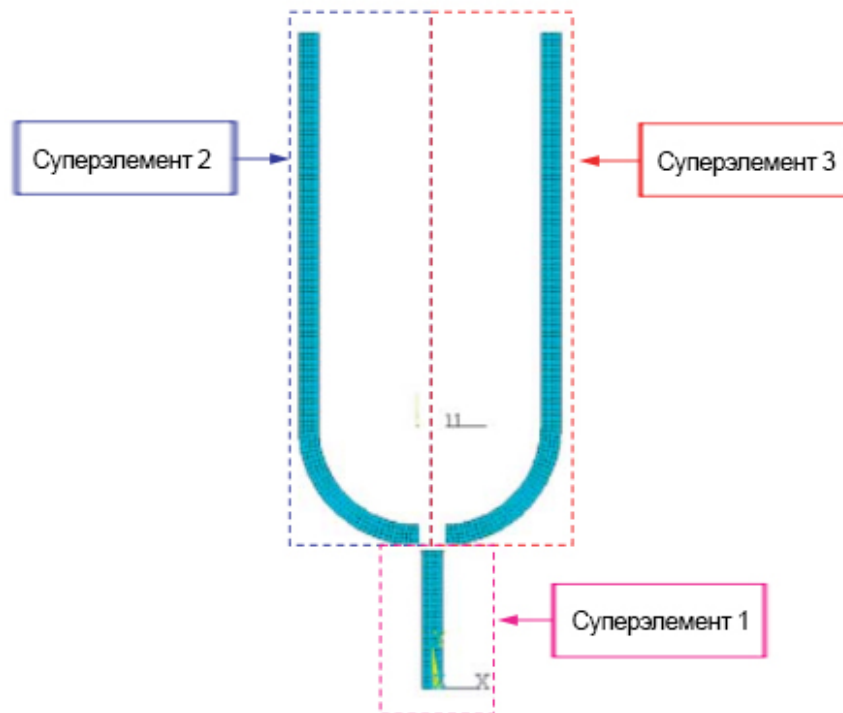


Рисунок 3.2. Схема разделения модели камертона на суперэлементы.

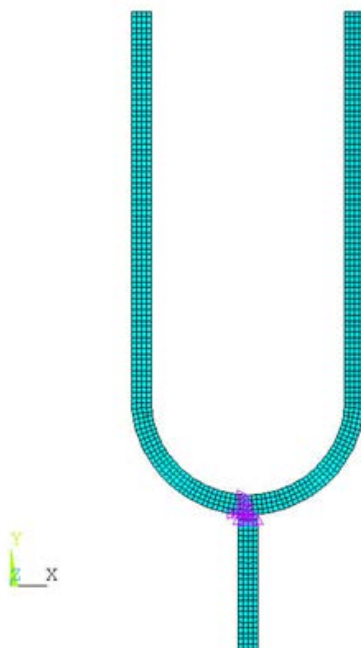


Рисунок 3.3. Общий вид суперэлементной модели с указанием стыковочных узлов

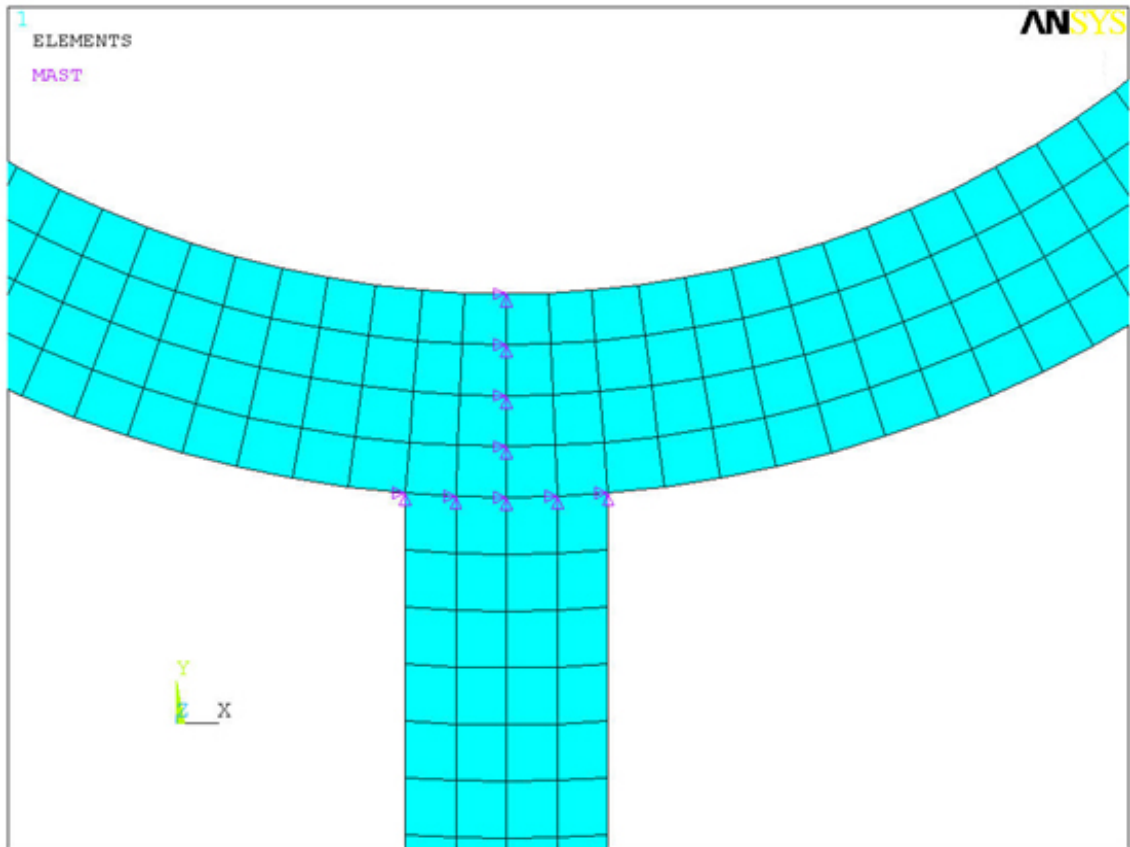


Рисунок 3.4. Фрагмент суперэлементной модели в месте соединения суперэлементов. Граничные узлы отмечены фиолетовыми маркерами.

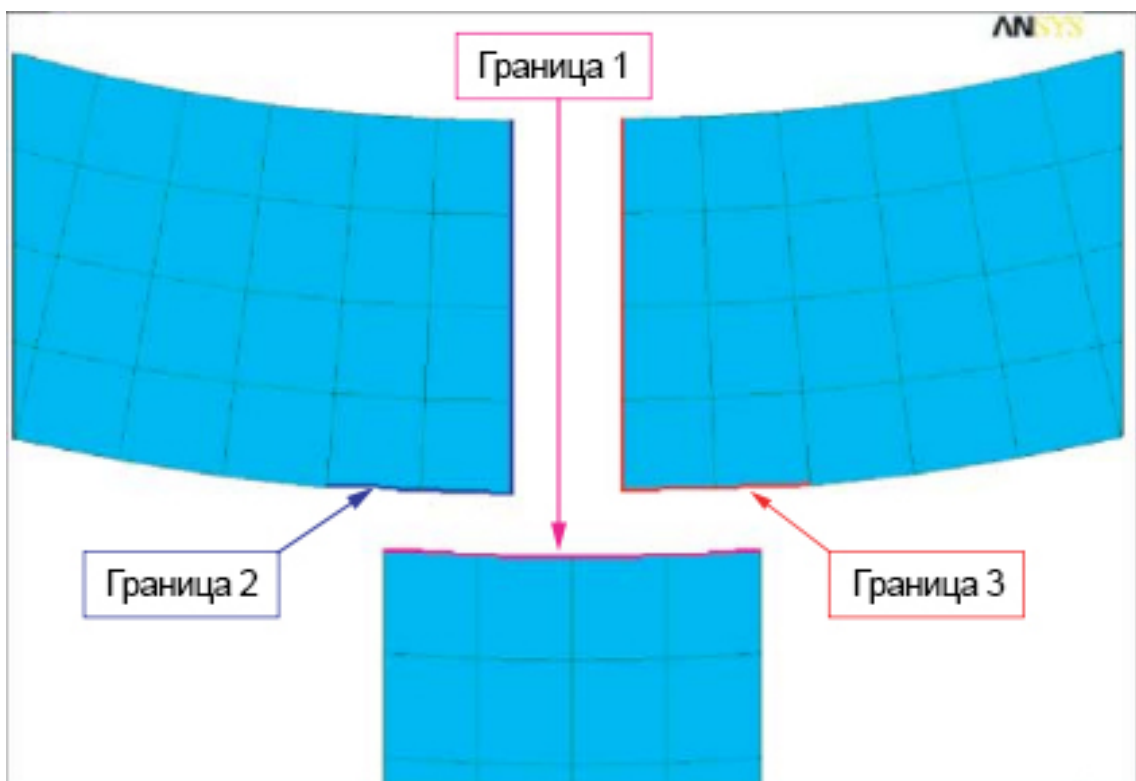


Рисунок 3.5. Границы суперэлементов

3.2.2. Результаты расчетов

Верифицируемыми результатами расчёта являются первые три «нулевые» собственные частоты (отвечают формам движения как жесткого тела) и низшие (с 4-й по 10-ю) частоты и формы упругих собственных колебаний. Ниже в таблице 3.3 приведены частоты собственных колебаний камертона, полученные с применением полной КЭ-модели и суперэлементных моделей с использованием различных методов учета внутренних форм колебания подконструкций.

Таблица 3.3. Сопоставление результатов расчёта камертона.

№ частоты	Собственная частота, Гц				
	Полная система Суперэлементные модели			Полная система КЭ-модель	Δ_{\max} , (%)
	Метод фиксированной границы	Метод свободной границы	Метод остаточной гибкости свободной границы		
1	0,000	0,000	0,000	0,000	
2	0,000	0,000	0,000	0,000	
3	0,110	0,110	0,110	0,130	
4	204,958	204,958	204,958	204,958	0,000
5	654,403	654,403	654,403	654,403	0,000
6	1326,910	1326,910	1326,910	1326,910	0,000
7	2118,220	2118,130	2118,130	2118,130	0,004
8	3023,530	3023,300	3023,300	3023,300	0,008
9	3427,260	3427,080	3427,080	3427,080	0,005
10	5118,170	5117,470	5117,470	5117,470	0,014
...

Ниже на рисунках 3.6 – 3.7 приведены частоты и формы собственных колебаний камертона, полученных с использованием полной КЭ-модели.

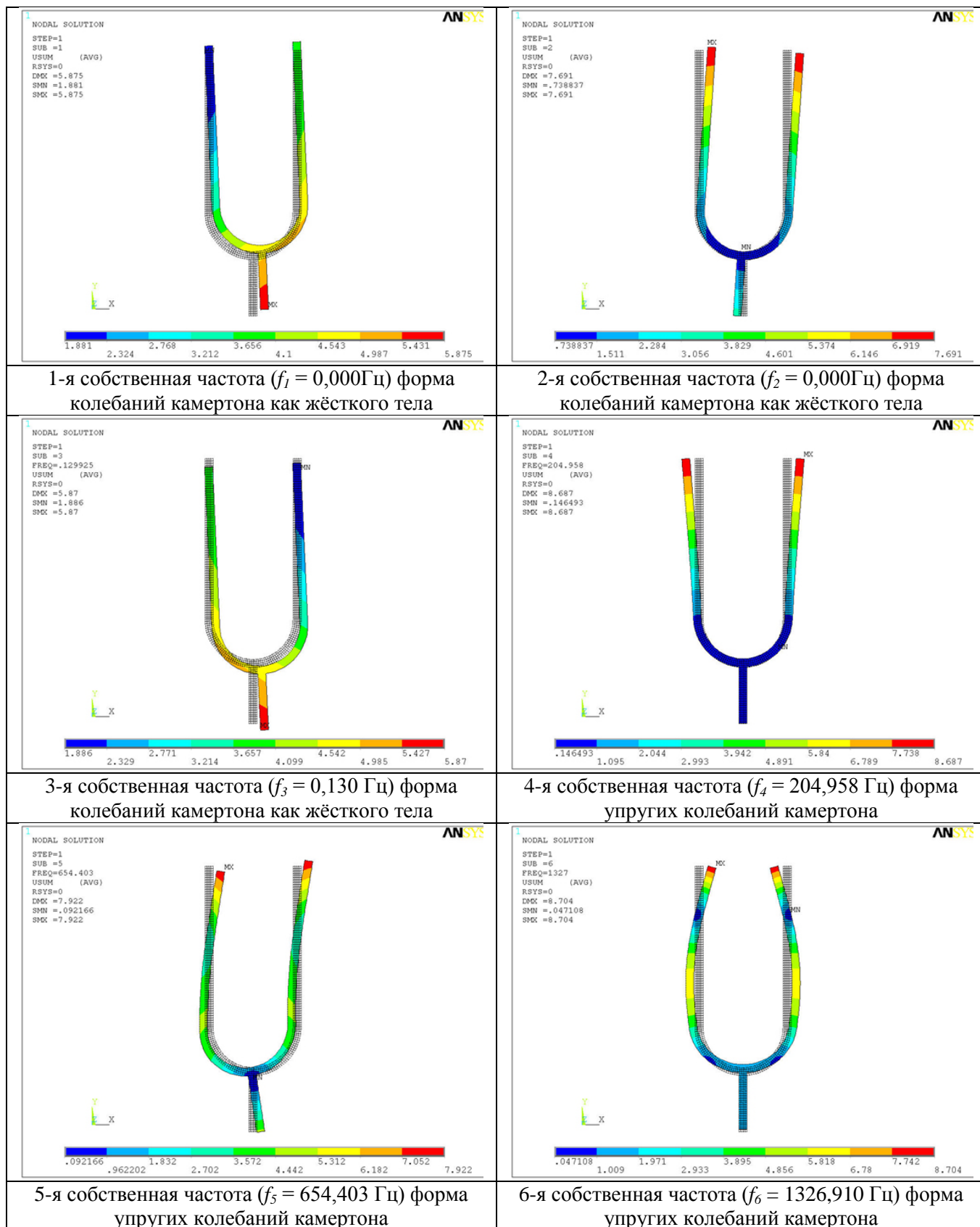


Рисунок 3.6. Частоты и формы собственных колебаний камертона, полученные с использованием полной КЭ-модели.

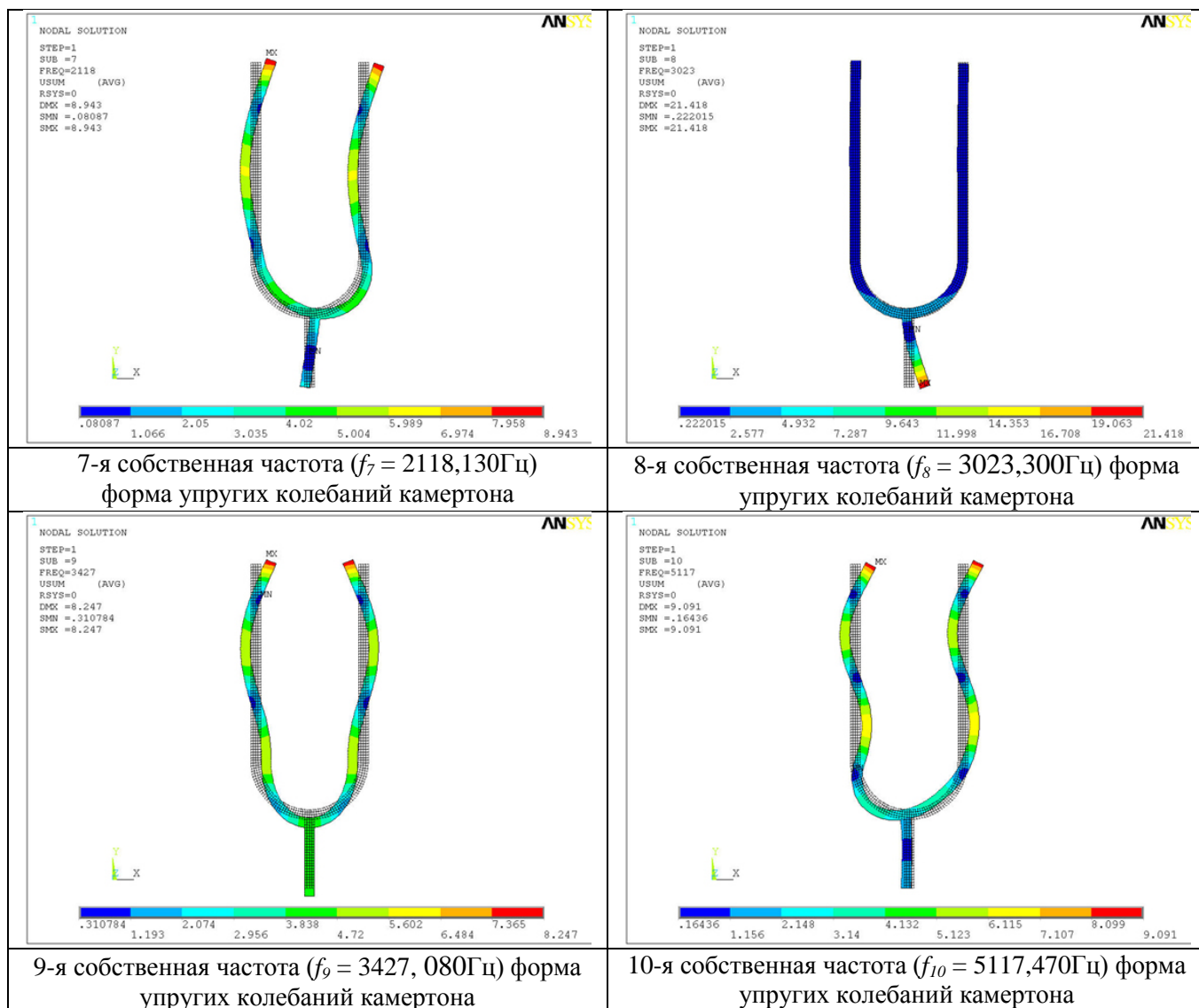


Рисунок 3.7. Частоты и формы собственных колебаний камертона, полученные с использованием полной КЭ-модели.

Этот пример демонстрирует работоспособность метода динамического синтеза подконструкций. Сравнительный анализ вычисленных собственных частот и форм колебаний камертона, полученных с применением полной КЭ-модели и суперэлементных моделей с использованием различных методов учета внутренних форм колебания подконструкций, показал близкие результаты для всех проведенных вариантов расчетов. Максимальная разница вычисленных собственных частот колебаний составила 0,014 %. Наиболее эффективными и удобными, с точки зрения практического использования и реализации в применяемом ПК, показали себя методы фиксированной и свободной границы.

3.3. Моделирование динамических характеристик входного блока ТЦ «Волгамолл» по разработанной методике

3.3.1. Описание несущих конструкций. Параметры расчета

Несущие конструкции входного блока ТЦ «Волгамолл» в г. Волжский (рисунок 3.8) состоят из плитного фундамента на динамическом грунтовом основании, опорного железобетонного каркаса и металлического купола покрытия.

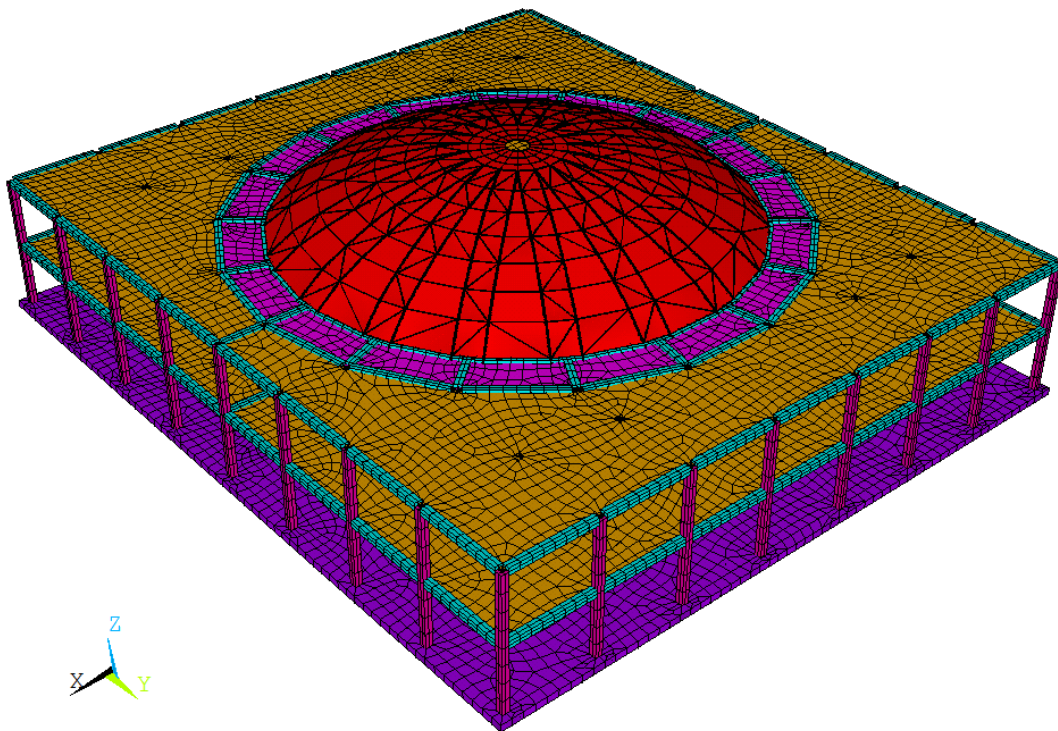


Рисунок 3.8. Разработанная полная КЭ-модель системы «основание – железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия» входного блока ТЦ «Волгамолл» в г. Волжский.

Фундаментом является железобетонная плита толщиной 600мм. Железобетонный каркас (рисунок 3.9) – система колонн сечением 600×600мм расположенных по ортогональной сетке, и 18 дополнительных колонн для опирания ферм покрытия, 2 плиты перекрытий толщиной 250 мм и контурные балки.

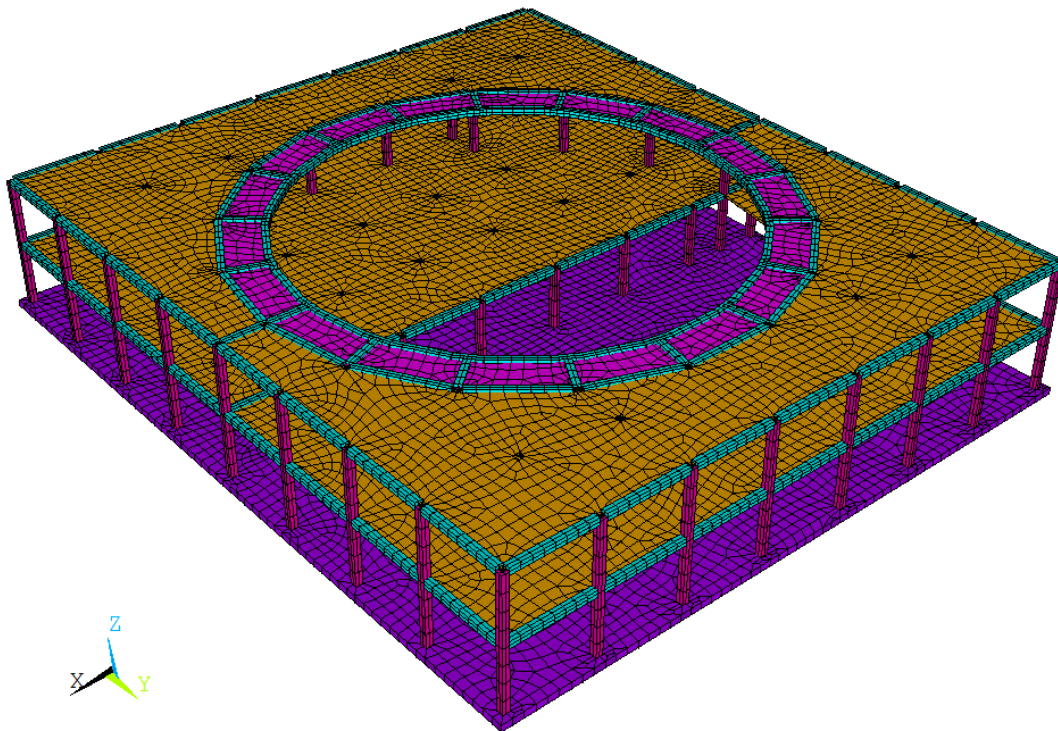


Рисунок 3.9. Разработанная КЭ-модель подсистемы «основание – железобетонные конструкции каркаса» входного блока ТЦ «Волгамолл».

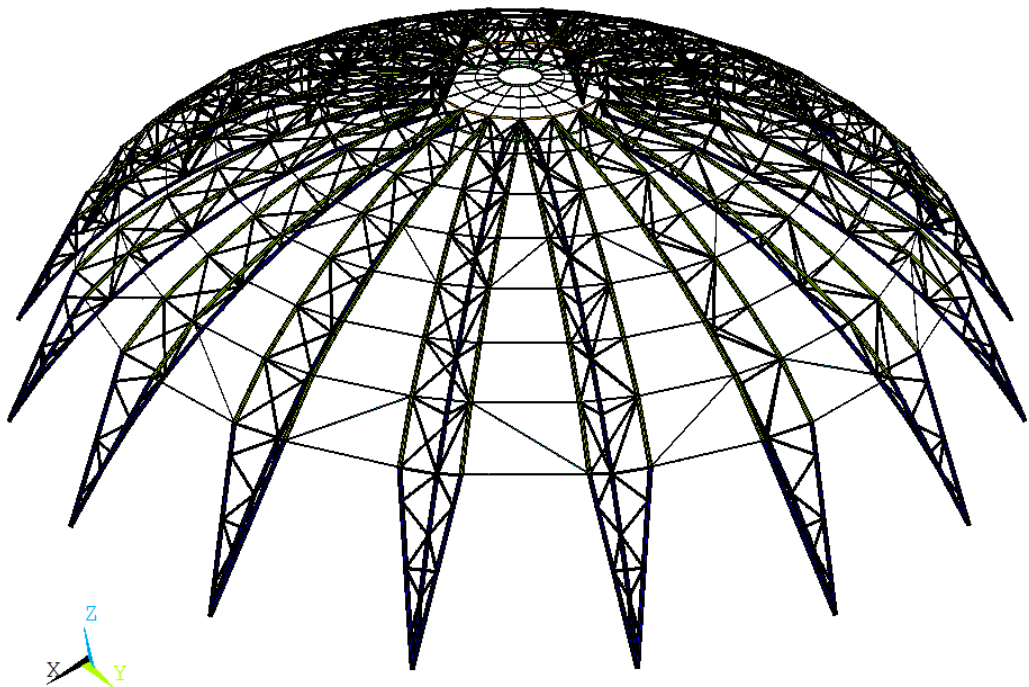


Рисунок 3.10. Разработанная КЭ-модель подсистемы «металлические конструкции покрытия» входного блока ТЦ «Волгамолл».

Металлические конструкции покрытия (рисунок 3.10) состоят из 18-ти радиальных «треугольных» ферм, расположенных по окружности, с угловым шагом 20° друг к другу. Фермы состоят из 2-х верхних поясов и 1-го нижнего. Пояса кольцевого сечения, соединены между собой трубчатыми связями и раскосами. По внешней грани покрытия фермы опираются на колонны, по внутренней (в центре купола) – соединены кольцевым поясом.

Сечения металлических конструкций купола представлены в таблице 3.4. Величины физико-механических характеристик примененных материалов приведены в таблице 3.5.

Таблица 3.4. Сечения металлических конструкций купола











№ п/п	Профиль	Тип сечения	Размеры, мм
1		Труба прямоугольная	150×100×6
2		Труба прямоугольная	120×60×5
3		Двутавр	16В2
4		Двутавр	26Ш2
5		Двутавр	30Ш2
6		Труба круглая	168×5
7		Труба круглая	168×8
8		Труба круглая	89×6
9		Труба круглая	114×6
10		Труба круглая	76×6

Таблица 3.5. Физико-механические характеристики материалов

<i>Бетон В25</i>	
Плотность ρ	2,500 т/м ³
Модуль упругости E	3,00×10 ⁴ МПа
Коэффициент Пуассона ν	0,2
<i>Сталь С235</i>	
Плотность ρ	7,850 т/м ³
Модуль упругости E	2,10×10 ⁵ МПа
Коэффициент Пуассона ν	0,3

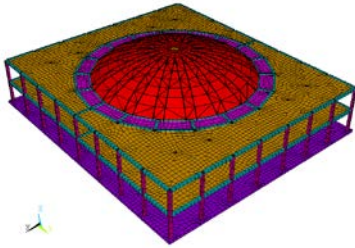
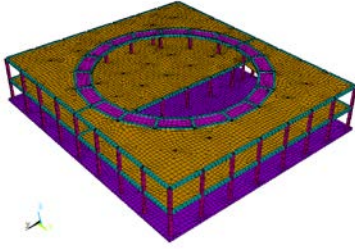
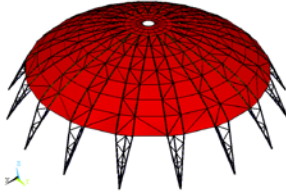
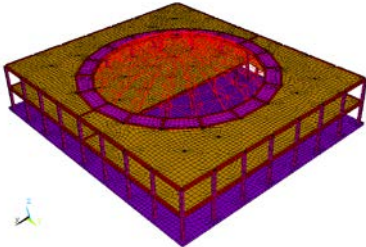
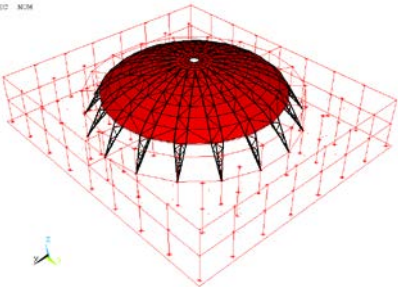
3.3.2. Расчетные КЭ-модели

На основании анализа и обобщения актуальной проектной документации в программном комплексе ANSYS Mechanical построены и верифицированы следующие геометрические и пространственные оболочечно-стержневые конечноэлементные модели входного блока ТЦ «Волгамолл»:

1. полной системы «железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия»;
2. подсистемы «основание – железобетонные конструкции каркаса»;
3. подсистемы «металлические конструкции покрытия»;
4. подсистемы «основание – железобетонные конструкции каркаса» с учетом металлических конструкций покрытия как суперэлемента;
5. подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом подсистемы «основание – железобетонные конструкций каркаса» как суперэлемента.

Общий вид, размерность и типы используемых элементов построенных КЭ-моделей приведены в таблице 3.6. Для моделирования плит перекрытий и фундамента использовались четырехугольные и треугольные в плане КЭ оболочки типа SHELL181 – оболочечный элемент, реализующий теорию Миндлина-Рейсснера для оболочек средней толщины. Балки и колонны представлены стержневыми КЭ типа BEAM188 – 2-х узловой пространственный балочный элемент, реализующий теорию Тимошенко. MATRIX50 (суперэлемент) – группа предварительно собранных конечных элементов, которая представлена редуцированными матрицами (жесткости, масс, нагрузок).

Таблица 3.6. Разработанные расчетные КЭ-модели входного блока ТЦ «Волгамолл» в г. Волжский.

№	КЭ-модели системы/подсистемы	Изображение	Кол-во узлов	Кол-во элементов	Типы КЭ
1	“основание – железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия”		38 119	24 430	SHELL181 BEAM188
2	“основание – железобетонные конструкции каркаса”		16 710	16 405	SHELL181 BEAM188
3	“металлические конструкции покрытия”		21 427	8 025	SHELL181 BEAM188
4	“основание – железобетонные конструкции каркаса” + суперэлемент покрытие		16 710	16 406	SHELL181 BEAM188 MATRIX50
5	“металлические конструкции покрытия” + суперэлемент основание – железобетонные конструкции каркаса		21 427	8 026	SHELL181 BEAM188 MATRIX50

*приведенные в настоящей таблице вычислительные размерности соответствуют 4-му варианту (модель 1d) разбиения сетки КЭ (см. таблицу 3.7)

Граничные условия – упругое динамическое основание, статический коэффициент постели увеличен в 10 раз. Для подсистемы «металлические конструкции покрытия» нижние узлы сегментов покрытия жестко заземлены.

Расчет динамических характеристик проводился блочным методом Ланцоша. Для верификационных целей частоты и формы собственных колебаний вычислены с учетом массы только от собственного веса несущих конструкций.

Все вычисления в настоящем исследовании проводились с использованием IBM совместимой ЭВМ Intel(R) Core(TM) i7-4820K CPU 3.70GHz, 64Gb RAM, SSD.

3.3.3. Порядок проведения расчетов

Расчетные исследования динамических характеристик входного блока ТЦ «Волгамолл» проводились в следующем порядке:

- Исследование влияния подробности сетки конечных элементов (размера и количества КЭ) на вычисление динамических характеристик рассматриваемой системы. Выбор оптимального способа разбиения модели с точки зрения адекватности результатов и вычислительной размерности.
- Определение динамических характеристик полной системы и моделей подсистем без учета суперэлементов. Сопоставление результатов, анализ возможности перехода к расчетам отдельных подсистем.
- Вычисление динамических характеристик подсистем с учетом суперэлементов. Исследование особенностей применения методов фиксированной и свободной границы, влияния количества учтенных внутренних форм колебаний. Сопоставление результатов с динамическими характеристиками полной системы. Оценка вычислительной эффективности разработанной методики.

3.3.4. Исследование влияния подробности сетки конечных элементов на динамические характеристики

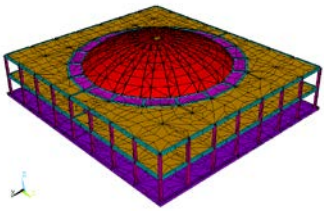
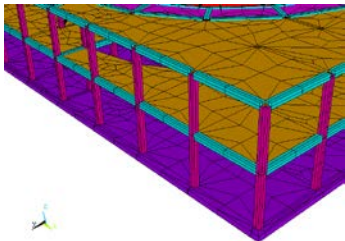
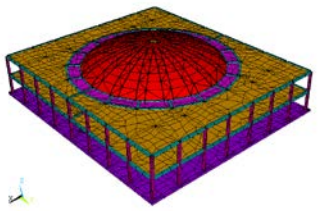
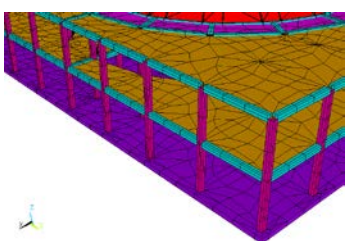
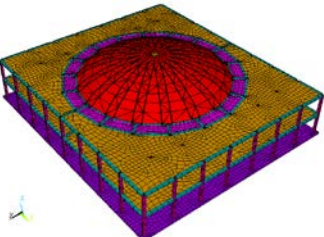
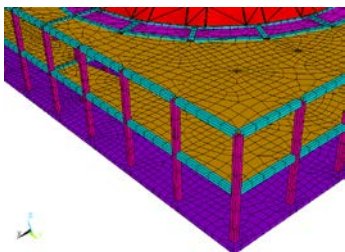
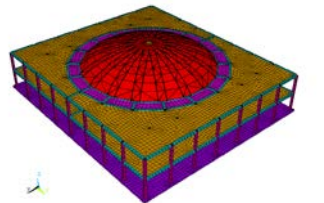
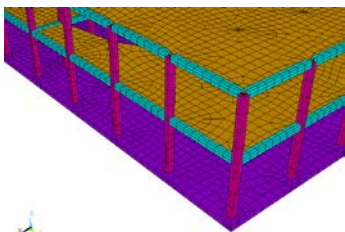
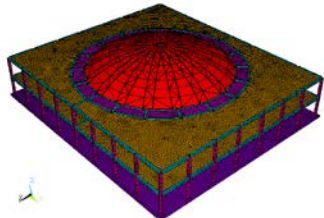
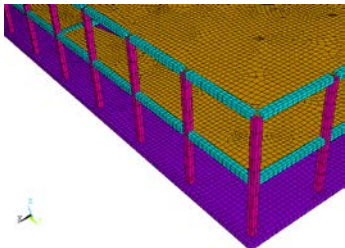
Рассмотрены 5 вариантов разбиения модели с различной длиной грани конечного элемента, а также разным общим количеством элементов. Описание способа разбиения, количества конечных элементов вдоль конструктивного элемента (пролет плиты, балка, колонна, элемент фермы покрытия), общие вычислительные размерности и графические изображения модели и её увеличенного фрагмента приведены в таблице 3.7.

Для полной системы с использованием каждой модели было вычислены частоты и формы собственных колебаний в диапазоне до 33 Гц. Диапазон 33 Гц выбран как пример одного из наиболее широких диапазонов динамических нагрузок, возникающих в строительной практике, и характерен для сейсмического воздействия.

На гистограмме (рисунок 3.11) показано сравнение частот собственных колебаний системы, вычисленных по 5 описанным моделям. В диапазоне от 0 до 4.5 Гц имеют близкие значения, что видно на увеличенном фрагменте гистограммы. На более высоких частотах проявляются значительные расхождения. Значения, полученные по моделям 1a и 1b (с наиболее грубыми сетками, 1 или 2 КЭ на колонну/элемент фермы) в диапазоне от 4.5 до 33 Гц являются завышенными по сравнению с полученными по моделям с более подробными сетками. Модель 1c дает значения собственных частот, в целом, близкие, полученным в моделях 1d и 1e. Значения частот по моделям 1d и 1e практически совпадают, это указывает на то, что дальнейшее сгущение сетки конечных элементов не приводит к значительному увеличению точности решения в диапазоне до 33 Гц.

В силу сказанного выше в дальнейших исследованиях входного блока ТЦ «Волгамолл» за основу взята модель 1d (4 КЭ на каждую колонну и элемент фермы и 8 КЭ вдоль пролета для балок и плит перекрытия).

Таблица 3.7. Разработанные расчетные КЭ-модели несущих конструкций входного блока ТЦ «Волгамолл» в г. Волжский с сетками разной подробности.

№	Способ разбиения	Изображение	Изображение. Увеличенный фрагмент	Кол-во узлов	Кол-во элементов
1a	1 КЭ на каждую колонну и элемент фермы. 2 КЭ вдоль пролета для балок и плит перекрытия			8 430	7 878
1b	2 КЭ на каждую колонну и элемент фермы. 3 КЭ вдоль пролета для балок и плит перекрытия			15 729	10 695
1c	3 КЭ на каждую колонну и элемент фермы. 5 КЭ вдоль пролета для балок и плит перекрытия			31 001	21 495
1d	4 КЭ на каждую колонну и элемент фермы. 8 КЭ вдоль пролета для балок и плит перекрытия			38 119	24 430
1e	5 КЭ на каждую колонну и элемент фермы. 15 КЭ вдоль пролета для балок и плит перекрытия			73 512	54 518

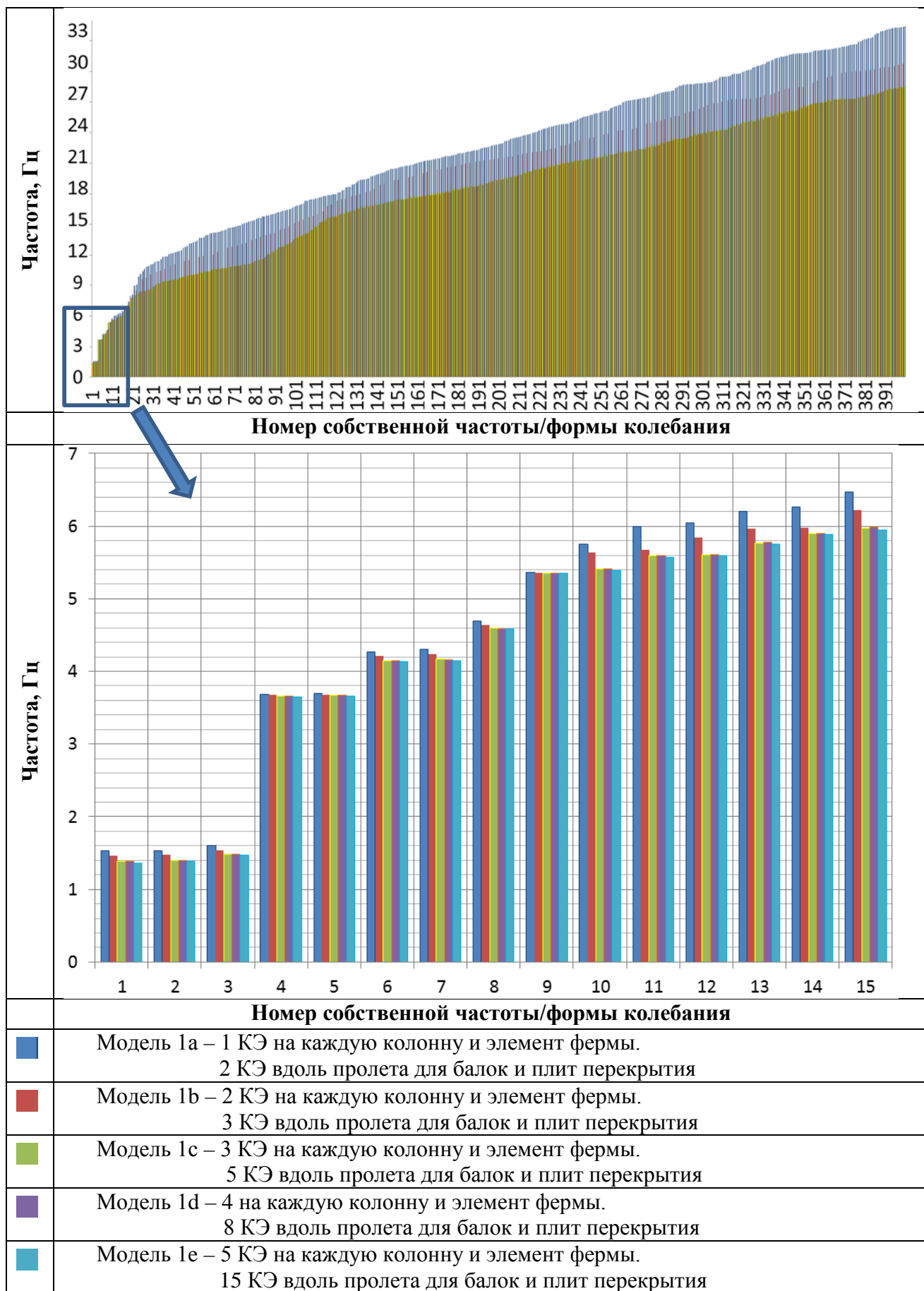


Рисунок 3.11. Сопоставление частот собственных колебаний, вычисленных при различной подробности сетки конечных элементов.

3.3.5. Результаты расчетов без использования суперэлементов

3.3.5.1. Результаты расчета динамических характеристик полной системы и подсистем без использования суперэлементов

В данном параграфе, в таблицах 3.8 и 3.9, представлены результаты расчета динамических характеристик полной системы «основание – железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия» и подсистем входного блока ТЦ «Волгамолл» без использования суперэлементов.

Таблица 3.8. Сопоставление собственных частот колебаний полной системы и составляющих её подсистем входного блока ТЦ «Волгамолл».

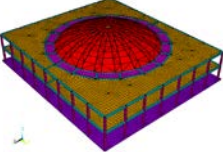
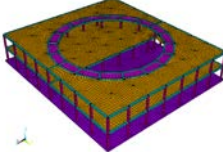

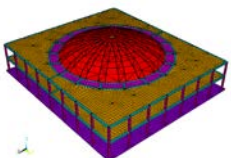
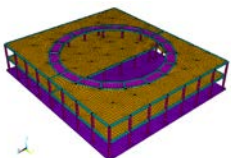
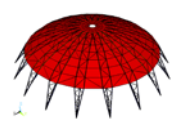
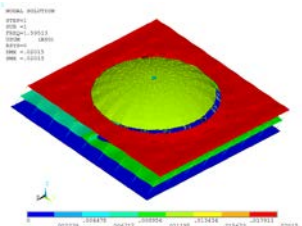
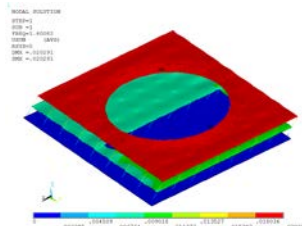
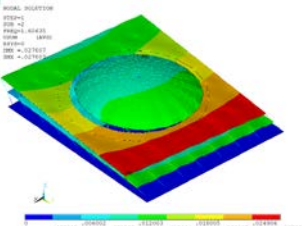
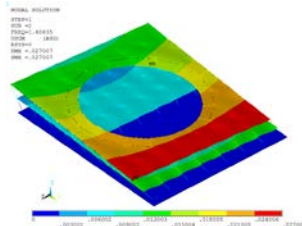
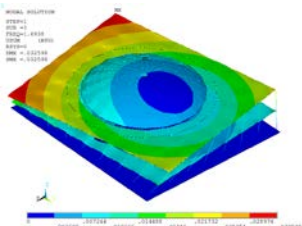
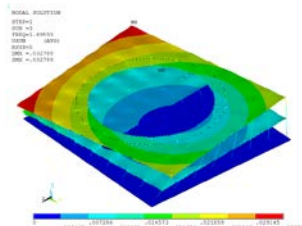
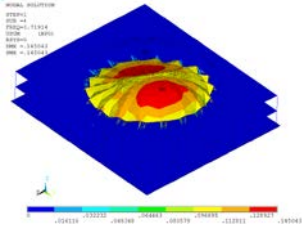
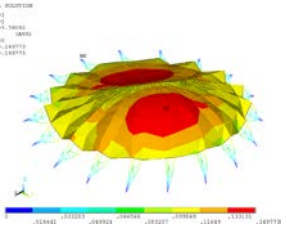
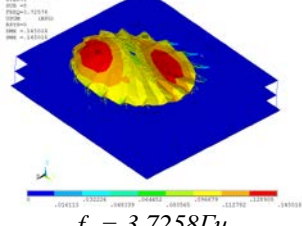
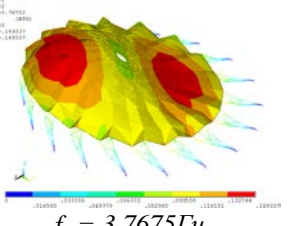
 Модель 1		 Модель 2		 Модель 3		Δ, %
№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	
1	1,5951	1	1,6008			0,356
2	1,6063	2	1,6113			0,310
3	1,6938	3	1,6956			0,106
4	3,7191			1	3,7609	1,111
5	3,7258			2	3,7675	1,107
6	4,8397	4	4,8038			0,842
7	4,8746	5	4,8425			0,659
8	5,0442	6	5,0437			0,010
9	5,1728	9	5,6107	3	5,3001	2,402
10	5,4124	8	5,4056			0,126
11	5,4358	7	5,3985			0,686
12	5,7036	10	5,7136			0,175
13	5,7279					-
14	5,8536	11	5,8527			0,015
15	6,4945	12	6,4930			0,023
16	6,7866	13	6,7746			0,177
17	6,8911	14	6,8783			0,186
18	7,2462	15	7,2419			0,059
19	7,5691	16	7,5682			0,012
20	7,6906	17	7,6899			0,009
21	7,8994	18	7,8987			0,009
22	7,9821	19	7,9825			0,005
23	8,0062	20	8,0051			0,014
24	8,1025	21	8,0998			0,033
25	8,1114	22	8,1088			0,032
26	8,1648	23	8,1643			0,006
27	8,2059	24	8,2052			0,009
28	8,3077	25	8,3053			0,029
29	8,3128	26	8,3103			0,030
30	8,6412	27	8,6364			0,056
...

Таблица 3.9. Сопоставление собственных частот и форм колебаний полной системы и подсистем без применения суперэлементного подхода входного блока ТЦ «Волгамолл».

 Модель 1		 Модель 2		 Модель 3		$\Delta, \%$
№ п/п	Форма колебания/частота	№ п/п	Форма колебания/частота	№ п/п	Форма колебания/частота	
1	 $f_1 = 1,5951 \text{ Гц}$	1	 $f_1 = 1,6008 \text{ Гц}$	-	-	0,356
2	 $f_2 = 1,6064 \text{ Гц}$	2	 $f_2 = 1,6001 \text{ Гц}$	-	-	0,310
3	 $f_3 = 1,6938 \text{ Гц}$	3	 $f_3 = 1,6956 \text{ Гц}$	-	-	0,106
4	 $f_4 = 3,7191 \text{ Гц}$	-	-	1	 $f_1 = 3,7609 \text{ Гц}$	1,111
5	 $f_5 = 3,7258 \text{ Гц}$	-	-	2	 $f_2 = 3,7675 \text{ Гц}$	1,107

3.3.5.2. Сопоставление результатов, анализ возможности перехода к расчетам отдельных моделей

При сопоставлении результатов динамических расчетов сравнивались частоты и формы собственных колебаний полной системы «железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия» входного блока и составляющих её подсистем. Результаты такого сопоставления приведены в таблицах 3.8 и 3.9. Δ в указанных таблицах – максимальная разница, выраженная в процентном отношении, частот собственных колебаний полной системы и подсистем. Зеленым фоном в таблицах отмечены частоты собственных колебаний полной системы и подсистем на которых формы колебаний совпадают. Оранжевым фоном выделены те частоты колебания полной системы, которым не соответствуют формы колебаний подсистем или отсутствуют вовсе. Красным отмечены те частоты колебаний подсистем, на которых формы колебаний не соответствуют формам полной системы, либо отсутствуют.

Показано, что в полной системе проявляются связанные формы колебаний железобетонного каркаса и металлических конструкций покрытия, никак не отраженные в формах колебаний отдельных подсистем. Это свидетельствуют о невозможности проведения независимых расчетов подсистем.

3.3.6. Результаты расчетов с использованием суперэлементов

3.3.6.1. Результаты расчета динамических характеристик подсистем с использованием суперэлементов

В данном параграфе представлены результаты расчета динамических характеристик подсистем с применением суперэлементов (здесь и далее подсистемой с суперэлементом для краткости обозначена полная система, в которой одна из подсистем моделируется конечными элементами, а вторая – динамическим суперэлементом). Учет внутренних форм колебаний подконструкции производился методами фиксированной границы и свободной границы. Также проводился расчет методом статической конденсации без учета внутренних форм колебаний подконструкции.

Расчет динамических характеристик проводился блочным методом Ланцоша. Для каждой системы/подсистемы были вычислены частоты и формы собственных колебаний в диапазоне до 33 Гц. Количество внутренних форм колебаний подконструкции варьировалось. Учитывались частоты внутренних колебаний, попадающие в интервалы: до 3 Гц, 6 Гц, 12 Гц, 24 Гц, 33 Гц и 66 Гц (таблица 3.10). Такой выбор интервалов связан с характерными диапазонами динамических нагрузок, возникающих в строительной практике.

Таблица 3.10. Количество внутренних частот и форм собственных колебаний подконструкций в различных частотных диапазонах.

		Подконструкция «основание – железобетонные конструкции каркаса»				Подконструкция «металлические конструкции покрытия»			
		Метод фиксированной границы		Метод свободной границы		Метод фиксированной границы		Метод свободной границы	
№ п/п	Частотный диапазон, Гц	Кол-во частот и форм	Макс. частота, Гц	Кол-во частот и форм	Макс. частота, Гц	Кол-во частот и форм	Макс. частота, Гц	Кол-во частот и форм	Макс. частота, Гц
1	до 3 (3,8)	3	2,917	3	1,696	2	3,768	14	2,847
2	до 6 Гц	8	5,598	11	5,853	3	5,300	22	4,883
3	до 12 Гц	75	11,979	82	11,907	8	11,567	48	11,532
4	до 24 Гц	218	23,688	229	23,998	73	23,949	99	23,867
5	до 33 Гц	307	32,975	324	32,957	158	32,772	193	32,996
6	до 66 Гц	887	65,881	919	65,994	1070	65,999	1115	65,908

В таблице 3.11 приведено сопоставление «машинного» времени вычисления динамических характеристик полной системы и подсистем с суперэлементами. Таблица 3.12 содержит данные о времени вычисления внутренних форм колебаний подконструкций различными методами.

Таблица 3.11. Сопоставление времени вычисления динамических характеристик полной системы и подсистем с суперэлементами.

№ п/п	Частотный диапазон (Количество частот и форм)	Время счета		Время счета			
		Полная сиситема	Диапазон частот, удержанных в суперэлементе	Подсистема с суперэлементом Метод фиксированной границы		Подсистема с суперэлементом Метод свободной границы	
		 Модель 1		 Модель 4	 Модель 5	 Модель 4	 Модель 5
1	до 3 Гц (3)	0:00:08	до 3 Гц до 6 Гц	0:00:04 0:00:04	0:00:04 0:00:04	0:00:04 0:00:04	0:00:04 0:00:04
2	до 6 Гц (14)	0:00:09	до 6 Гц до 12 Гц	0:00:05 0:00:05	0:00:05 0:00:05	0:00:05 0:00:05	0:00:05 0:00:05
3	до 12 Гц (90)	0:00:15	до 12 Гц до 24 Гц	0:00:13 0:00:14	0:00:12 0:00:14	0:00:14 0:00:14	0:00:12 0:00:14
4	до 33 Гц (482)	0:01:06	до 33 Гц до 66 Гц	0:01:06 0:01:12	0:01:05 0:01:11	0:01:07 0:01:15	0:01:06 0:01:17

Время счета приведено в формате: «ч:мм:сс».

Таблица 3.12. Время вычисления внутренних форм колебаний подконструкций.

№ п/п	Частотный диапазон	Метод фиксированной границы				Метод свободной границы			
		Подконструкция «основание – железобетонные конструкции каркаса»		Подконструкция «металлические конструкции покрытия»		Подконструкция «основание – железобетонные конструкции каркаса»		Подконструкция «металлические конструкции покрытия»	
		Количество частот и форм	Время счета	Количество частот и форм	Время счета	Количество частот и форм	Время счета	Количество частот и форм	Время счета
1	до 3Гц	3	0:00:04	2	0:00:04	3	0:00:03	14	0:00:06
2	до 6Гц	11	0:00:05	3	0:00:05	11	0:00:05	22	0:00:06
3	до 12Гц	76	0:00:06	8	0:00:05	82	0:00:09	48	0:00:08
4	до 24Гц	218	0:00:15	73	0:00:11	229	0:00:24	99	0:00:16
5	до 33Гц	307	0:00:20	158	0:00:19	324	0:00:39	193	0:00:31
6	до 66Гц	887	0:00:59	1070	0:01:42	919	0:03:02	1115	0:07:21

Время счета приведено в формате: «ч:мм:сс».

На гистограммах на рисунках 3.12 и 3.13 приведено сравнение «машинного» времени вычисления динамических характеристик полной системы и подсистем с суперэлементами. Время счета приведено в формате «ч:мм:сс». Для подсистем с суперэлементами данные приведены как учетом, так и без учета времени, затраченного на вычисление внутренних частот/форм подконструкций. По вертикали на гистограммах отмечено время, по горизонтали частотные диапазоны, в которых производилось вычисление динамических характеристик. Красным фоном отмечены временные затраты при расчете полной системы «основание – железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия» (модель 1). Фиолетовым – для подсистемы «основание – железобетонные конструкции каркаса» с учетом суперэлемента «металлические конструкции покрытия» (Модель 4), при этом внутренние формы колебаний суперэлемента вычислены в том же частотном диапазоне, что и исследуемый для всей модели. Желтым – для подсистемы «основание – железобетонные конструкции каркаса» с учетом суперэлемента «металлические конструкции покрытия» (Модель 4), при этом внутренние формы колебаний суперэлемента вычислены во вдвое большем частотном диапазоне, чем исследуемый для всей модели. Зеленым фоном отмечены временные затраты при расчете подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом суперэлемента «основание – железобетонные конструкции каркаса» (Модель 5), при этом внутренние формы колебаний суперэлемента вычислены в том же частотном диапазоне, что и исследуемый для всей модели. Синим – для подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом суперэлемента «основание – железобетонные конструкции каркаса» (Модель 5), при этом внутренние формы колебаний суперэлемента вычислены во вдвое большем частотном диапазоне, чем исследуемый для всей модели.

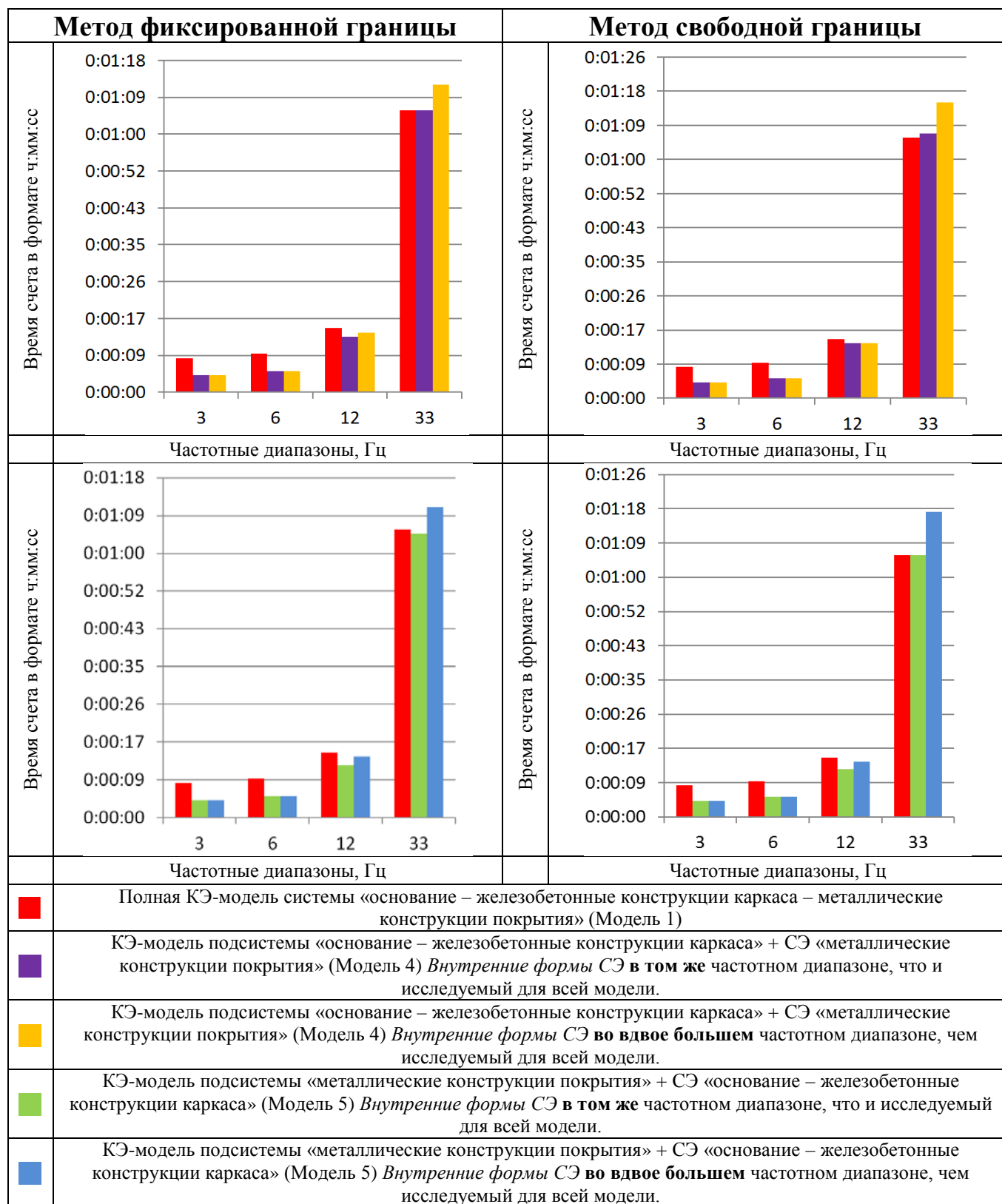


Рисунок 3.12. Сопоставление времени вычисления динамических характеристик полной системы и подсистем с суперэлементами *без учета* времени, затраченного на формирование СЭ.

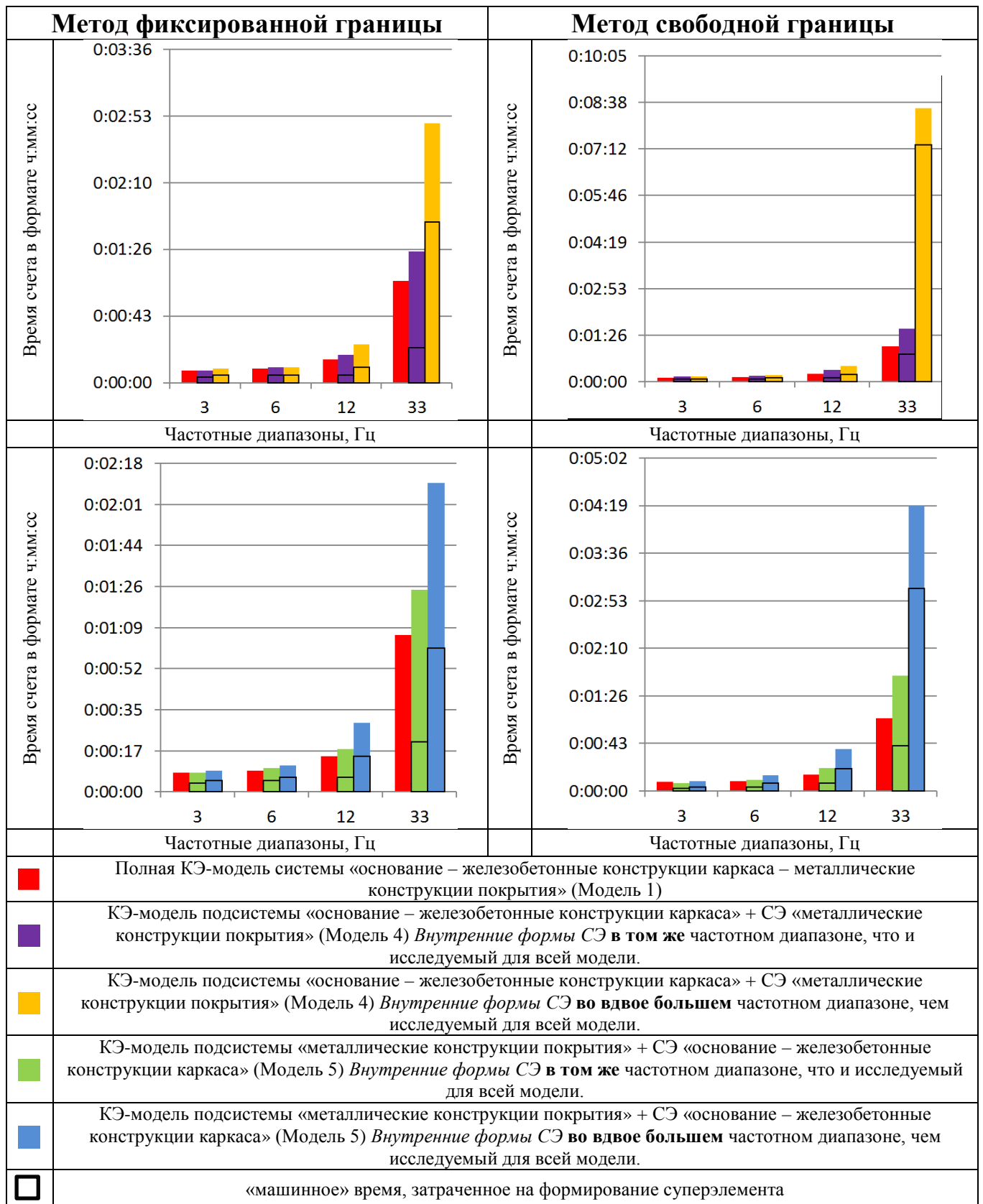


Рисунок 3.13. Сопоставление времени вычисления динамических характеристик полной системы и подсистем с суперэлементами с учетом времени, затраченного на формирование СЭ.

Таблица 3.13. Сопоставление собственных частот колебаний полной системы и подсистемы «основание – железобетонные конструкции каркас» с учетом подсистемы «металлические конструкции покрытия» как суперэлемента.

Полная модель	Метод статической конденсации	Δ_0 , %	Метод фиксированной границы 2 (до 3.8 Гц)	Δ_2 , %	Метод фиксированной границы 3 (до 6 Гц)	Δ_3 , %	Метод фиксированной границы 8 (до 12 Гц)	Δ_8 , %	Метод фиксированной границы 73 (до 24 Гц)	Δ_{73} , %	Метод фиксированной границы 158 (до 33 Гц)	Δ_{158} , %	Метод фиксированной границы 1070 (до 66 Гц)	Δ_{1070} , %		
№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	
1	1,595	1	1,596	0,069	1	1,595	0,000	1	1,595	0,000	1	1,595	0,000	1	1,595	0,000
2	1,606	2	1,607	0,068	2	1,606	0,006	2	1,606	0,006	2	1,606	0,000	2	1,606	0,000
3	1,694	3	1,694	0,018	3	1,694	0,012	3	1,694	0,000	3	1,694	0,000	3	1,694	0,000
4	3,719	-	-	-	4	3,719	0,003	4	3,719	0,000	4	3,719	0,000	4	3,719	0,000
5	3,726	-	-	-	5	3,726	0,000	5	3,726	0,000	5	3,726	0,000	5	3,726	0,000
6	4,840	4	4,754	1,767	6	4,841	0,025	6	4,841	0,025	6	4,840	0,004	6	4,840	0,000
7	4,875	5	4,790	1,746	7	4,880	0,107	7	4,876	0,029	7	4,875	0,006	7	4,875	0,004
8	5,044	6	5,044	0,002	8	5,044	0,002	8	5,044	0,000	8	5,044	0,000	8	5,044	0,000
9	5,173	-	-	-	-	-	-	9	5,173	0,002	9	5,173	0,000	9	5,173	0,000
10	5,412	7	5,387	0,466	9	5,395	0,314	10	5,413	0,013	10	5,413	0,002	10	5,412	0,000
11	5,436	8	5,392	0,804	10	5,413	0,414	11	5,436	0,007	11	5,436	0,002	11	5,436	0,000
12	5,704	9	5,579	2,178	11	5,597	1,871	12	5,704	0,004	12	5,704	0,000	12	5,704	0,000
13	5,728	10	5,715	0,234	12	5,716	0,217	13	5,728	0,007	13	5,728	0,002	13	5,728	0,000
14	5,854	11	5,854	0,002	13	5,854	0,002	14	5,854	0,002	14	5,854	0,000	14	5,854	0,000
15	6,495	12	6,495	0,000	14	6,495	0,002	15	6,495	0,002	15	6,495	0,002	15	6,495	0,000
16	6,787	13	6,788	0,016	15	6,789	0,035	16	6,789	0,035	16	6,787	0,012	16	6,787	0,003
...
89	11,830	81	11,830	0,000	83	11,830	0,000	84	11,830	0,000	89	11,830	0,000	89	11,830	0,000
90	11,908	82	11,908	0,000	84	11,908	0,000	85	11,908	0,000	90	11,908	0,000	90	11,908	0,000
91	12,037	83	12,036	0,008	85	12,036	0,008	86	12,036	0,008	91	12,037	0,000	91	12,037	0,000
92	12,120	84	12,119	0,008	86	12,120	0,000	87	12,120	0,000	92	12,120	0,000	92	12,120	0,000
93	12,319	85	12,320	0,008	87	12,320	0,008	88	12,320	0,008	93	12,321	0,016	93	12,320	0,008
...
301	23,927	-	-	-	-	-	-	-	-	-	301	23,928	0,004	301	23,927	0,000
302	23,996	229	23,990	0,025	231	23,991	0,021	232	23,991	0,021	237	23,992	0,017	302	24,011	0,062
303	24,110	230	24,098	0,050	232	24,098	0,050	233	24,099	0,046	238	24,099	0,046	303	24,117	0,029
304	24,140	-	-	-	233	24,154	0,058	234	24,154	0,058	239	24,155	0,062	304	24,164	0,099
305	24,158	231	24,154	0,017	234	24,208	0,207	235	24,208	0,207	240	24,208	0,207	305	24,221	0,260
...
478	32,705	-	-	-	324	32,670	0,107	325	32,670	0,107	330	32,675	0,092	395	32,695	0,031
479	32,727	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	479	32,729	0,006
480	32,741	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	480	32,742	0,003
481	32,882	323	32,844	0,116	325	32,848	0,103	326	32,851	0,094	331	32,852	0,091	396	32,879	0,009
482	32,971	324	32,867	0,315	326	32,906	0,197	327	32,906	0,197	332	32,912	0,179	397	32,974	0,009
...

Таблица 3.14. Сопоставление собственных частот колебаний полной системы и подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом подсистемы «основание – железобетонные конструкции каркас» как суперэлемента.

Полная модель		Метод статической конденсации		Δ_0 , %	Метод фиксированной границы 3 (до 3 Гц)		Δ_3 , %	Метод фиксированной границы 11 (до 6 Гц)		Δ_{11} , %	Метод фиксированной границы 75 (до 12 Гц)		Δ_{75} , %	Метод фиксированной границы 218 (до 24 Гц)		Δ_{218} , %	Метод фиксированной границы 307 (до 33 Гц)		Δ_{307} , %	Метод фиксированной границы 887 (до 66 Гц)		Δ_{887} , %
№	Частота, Гц	№	Частота, Гц		№	Частота, Гц		№	Частота, Гц		№	Частота, Гц		№	Частота, Гц		№	Частота, Гц		№	Частота, Гц	
1	1,595	1	1,854	13,978	1	1,596	0,038	1	1,595	0,019	1	1,595	0,019	1	1,595	0,019	1	1,595	0,013	1	1,595	0,000
2	1,606	2	1,872	14,175	2	1,607	0,037	2	1,607	0,025	2	1,607	0,019	2	1,607	0,019	2	1,607	0,012	2	1,606	0,006
3	1,694	3	1,962	13,661	3	1,694	0,030	3	1,694	0,030	3	1,694	0,030	3	1,694	0,030	3	1,694	0,006	3	1,694	0,000
4	3,719	4	3,789	1,845	4	3,720	0,024	4	3,719	0,008	4	3,719	0,008	4	3,719	0,008	4	3,719	0,005	4	3,719	0,000
5	3,726	5	3,796	1,844	5	3,727	0,022	5	3,726	0,008	5	3,726	0,008	5	3,726	0,008	5	3,726	0,003	5	3,726	0,000
6	4,840	-	-	-	-	-	-	6	4,861	0,444	6	4,860	0,422	6	4,860	0,420	6	4,853	0,274	6	4,840	0,008
7	4,875	-	-	-	7	5,019	2,871	7	4,903	0,581	7	4,901	0,543	7	4,901	0,537	7	4,888	0,280	7	4,875	0,012
8	5,044	-	-	-	6	4,990	1,071	8	5,045	0,020	8	5,044	0,004	8	5,044	0,002	8	5,044	0,000	8	5,044	0,000
9	5,173	6	5,311	2,599	8	5,207	0,651	9	5,186	0,255	9	5,186	0,249	9	5,186	0,247	9	5,174	0,017	9	5,173	0,002
10	5,412	-	-	-	-	-	-	10	5,432	0,365	10	5,430	0,330	10	5,430	0,326	10	5,424	0,207	10	5,413	0,007
11	5,436	-	-	-	-	-	-	11	5,451	0,275	11	5,449	0,237	11	5,449	0,233	11	5,442	0,108	11	5,436	0,006
12	5,704	-	-	-	-	-	-	12	5,716	0,219	12	5,712	0,154	12	5,712	0,151	12	5,706	0,033	12	5,704	0,005
13	5,728	-	-	-	9	5,782	0,934	13	5,799	1,231	13	5,797	1,192	13	5,796	1,178	13	5,732	0,066	13	5,728	0,007
14	5,854	-	-	-	-	-	-	14	5,855	0,029	14	5,854	0,003	14	5,854	0,002	14	5,854	0,002	14	5,854	0,000
15	6,495	-	-	-	-	-	-	15	6,500	0,077	15	6,495	0,005	15	6,495	0,003	15	6,495	0,002	15	6,495	0,002
16	6,787	-	-	-	-	-	-	16	6,817	0,445	16	6,799	0,188	16	6,799	0,182	16	6,797	0,153	16	6,787	0,006
17	6,891	7	7,206	4,374	10	7,431	7,263	18	7,472	7,779	17	6,924	0,472	17	6,923	0,464	17	6,916	0,364	17	6,892	0,009
18	7,246	-	-	-	-	-	-	17	7,255	0,119	18	7,250	0,055	18	7,250	0,052	18	7,250	0,048	18	7,246	0,001
...
89	11,830	-	-	-	-	-	-	-	-	-	88	11,806	0,203	89	11,830	0,000	89	11,830	0,000	89	11,830	0,000
90	11,908	-	-	-	-	-	-	-	-	-	89	11,923	0,126	90	11,909	0,008	90	11,908	0,000	90	11,908	0,000
91	12,037	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	91	12,037	0,000	91	12,037	0,000	91	12,037	0,000
92	12,120	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	92	12,121	0,008	92	12,120	0,000	92	12,120	0,000
93	12,319	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	93	12,320	0,008	93	12,320	0,008	93	12,320	0,008
...
301	23,927	95	23,926	0,004	95	23,925	0,008	101	23,918	0,038	157	23,923	0,017	298	23,930	0,013	300	23,922	0,021	301	23,928	0,004
302	23,996	-	-	-	96	23,988	0,033	102	23,98	0,067	158	24,014	0,075	299	23,967	0,121	301	23,935	0,254	302	23,999	0,013
303	24,110	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	300	24,062	0,199	302	24,019	0,377	303	24,112	0,008
304	24,140	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	303	24,127	0,054	304	24,141	0,004
305	24,158	96	24,187	0,120	97	24,187	0,120	103	24,181	0,095	159	24,187	0,120	301	24,187	0,120	304	24,161	0,012	305	24,159	0,004
...
478	32,705	-	-	-	202	32,698	0,021	202	32,698	0,021	244	32,684	0,064	383	32,693	0,037	468	32,695	0,031	478	32,715	0,031
479	32,727	213	33,779	3,114	203	32,731	0,012	203	32,731	0,012	245	32,700	0,083	384	32,728	0,003	469	32,733	0,018	479	32,731	0,012
480	32,741	214	33,880	3,362	204	32,754	0,040	204	32,754	0,040	246	32,719	0,067	385	32,741	0,000	470	32,750	0,027	480	32,743	0,006
481	32,882	215	33,937	3,109	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	471	32,778	0,316	481	32,893	0,033
482	32,971	216	33,945	2,869	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	472	32,939	0,097	482	32,994	0,070
...

Таблица 3.15. Сопоставление собственных частот колебаний полной системы и подсистемы «основание – железобетонные конструкции каркас» с учетом подсистемы «металлические конструкции покрытия» как суперэлемента.

Полная модель		Метод статической конденсации		Δ_0 , %	Метод свободной границы 14 (до 3 Гц)		Δ_{14} , %	Метод свободной границы 22 (до 6 Гц)		Δ_{22} , %	Метод свободной границы 48 (до 12 Гц)		Δ_{48} , %	Метод свободной границы 99 (до 24 Гц)		Δ_{99} , %	Метод свободной границы 193 (до 33 Гц)		Δ_{193} , %	Метод свободной границы 1115 (до 66 Гц)		Δ_{1115} , %
№	Частота, Гц	№	Частота, Гц		№	Частота, Гц		№	Частота, Гц		№	Частота, Гц		№	Частота, Гц		№	Частота, Гц		№	Частота, Гц	
1	1,595	1	1,596	0,069	1	1,595	0,000	1	1,595	0,000	1	1,595	0,000	1	1,595	0,000	1	1,595	0,000	1	1,595	0,000
2	1,606	2	1,607	0,068	2	1,606	0,000	2	1,606	0,000	2	1,606	0,000	2	1,606	0,000	2	1,606	0,000	2	1,606	0,000
3	1,694	3	1,694	0,018	3	1,694	0,000	3	1,694	0,000	3	1,694	0,000	3	1,694	0,000	3	1,694	0,000	3	1,694	0,000
4	3,719	-	-	-	4	3,737	0,482	4	3,737	0,479	4	3,719	0,005	4	3,719	0,000	4	3,719	0,000	4	3,719	0,000
5	3,726	-	-	-	5	3,744	0,484	5	3,744	0,484	5	3,726	0,003	5	3,726	0,000	5	3,726	0,000	5	3,726	0,000
6	4,840	4	4,754	1,767	6	4,844	0,085	6	4,844	0,085	6	4,840	0,000	6	4,840	0,000	6	4,840	0,000	6	4,840	0,000
7	4,875	5	4,790	1,746	7	4,879	0,092	7	4,879	0,092	7	4,875	0,002	7	4,875	0,000	7	4,875	0,000	7	4,875	0,000
8	5,044	6	5,044	0,002	8	5,044	0,000	8	5,044	0,000	8	5,044	0,000	8	5,044	0,000	8	5,044	0,000	8	5,044	0,000
9	5,173	-	-	-	9	5,183	0,191	9	5,181	0,164	9	5,173	0,000	9	5,173	0,000	9	5,173	0,000	9	5,173	0,000
10	5,412	7	5,387	0,466	10	5,414	0,028	10	5,414	0,028	10	5,412	0,000	10	5,412	0,000	10	5,412	0,000	10	5,412	0,000
11	5,436	8	5,392	0,804	11	5,438	0,044	11	5,438	0,039	11	5,436	0,000	11	5,436	0,000	11	5,436	0,000	11	5,436	0,000
12	5,704	9	5,579	2,178	12	5,706	0,040	12	5,706	0,035	12	5,704	0,000	12	5,704	0,000	12	5,704	0,000	12	5,704	0,000
13	5,728	10	5,715	0,234	13	5,732	0,070	13	5,731	0,059	13	5,728	0,000	13	5,728	0,000	13	5,728	0,000	13	5,728	0,000
14	5,854	11	5,854	0,002	14	5,854	0,002	14	5,854	0,002	14	5,854	0,000	14	5,854	0,000	14	5,854	0,000	14	5,854	0,000
15	6,495	12	6,495	0,000	15	6,495	0,002	15	6,495	0,002	15	6,495	0,000	15	6,495	0,000	15	6,495	0,000	15	6,495	0,000
16	6,787	13	6,788	0,016	16	6,788	0,018	16	6,788	0,018	16	6,787	0,002	16	6,787	0,000	16	6,787	0,000	16	6,787	0,000
...
89	11,830	81	11,830	0,000	87	12,003	1,441	87	11,979	1,244	89	11,831	0,009	89	11,830	0,000	89	11,830	0,000	89	11,830	0,000
90	11,908	82	11,908	0,000	88	12,040	1,096	88	12,020	0,932	90	11,908	0,000	90	11,908	0,000	90	11,908	0,000	90	11,908	0,000
91	12,037	83	12,036	0,008	89	12,112	0,619	89	12,040	0,025	91	12,037	0,000	91	12,037	0,000	91	12,037	0,000	91	12,037	0,000
92	12,120	84	12,119	0,008	90	12,248	1,045	90	12,120	0,000	92	12,120	0,000	92	12,120	0,000	92	12,120	0,000	92	12,120	0,000
93	12,319	85	12,320	0,008	91	12,335	0,130	91	12,320	0,008	93	12,320	0,008	93	12,319	0,000	93	12,319	0,000	93	12,319	0,000
...
301	23,927	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	296	23,888	0,163	301	23,980	0,221	301	23,928	0,004
302	23,996	229	23,990	0,025	241	23,976	0,083	249	23,984	0,050	275	24,007	0,046	297	24,006	0,042	302	24,004	0,033	302	23,996	0,000
303	24,110	230	24,098	0,050	242	24,099	0,046	250	24,106	0,017	276	24,118	0,033	298	24,119	0,037	303	24,114	0,017	303	24,111	0,000
304	24,140	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	299	24,161	0,087	304	24,151	0,046	304	24,141	0,004
305	24,158	231	24,154	0,017	243	24,153	0,021	251	24,156	0,008	277	24,161	0,012	300	24,222	0,264	305	24,177	0,079	305	24,159	0,000
...
478	32,705	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	471	32,789	0,256	478	32,706	0,003
479	32,727	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	415	32,723	0,012	472	32,835	0,329	479	32,729	0,006
480	32,741	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	416	32,815	0,226	473	32,845	0,317	480	32,743	0,006
481	32,882	323	32,844	0,116	337	32,858	0,073	345	32,868	0,043	371	32,885	0,009	417	32,922	0,122	474	32,903	0,064	481	32,883	0,003
482	32,971	324	32,867	0,315	338	32,946	0,076	346	32,960	0,033	372	32,981	0,030	418	32,985	0,042	475	32,995	0,073	482	32,971	0,000
...

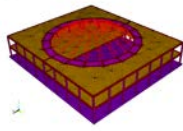
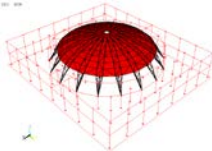
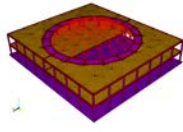
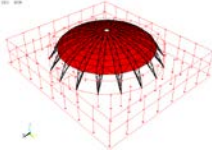
Таблица 3.16. Сопоставление собственных частот колебаний полной системы и подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом подсистемы «основание – железобетонные конструкции каркас» как суперэлемента.

Полная модель	Метод статической конденсации	Δ_0 , %	Метод свободной границы 3 (до 3 Гц)	Δ_3 , %	Метод свободной границы 11 (до 6 Гц)	Δ_{11} , %	Метод свободной границы 82 (до 12 Гц)	Δ_{82} , %	Метод свободной границы 229 (до 24 Гц)	Δ_{229} , %	Метод свободной границы 324 (до 33 Гц)	Δ_{324} , %	Метод свободной границы 919 (до 66 Гц)	Δ_{919} , %									
№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц								
1	1,595	1	1,854	13,978	1	1,595	0,000	1	1,595	0,000	1	1,595	0,000	1	1,595	0,000							
2	1,606	2	1,872	14,175	2	1,606	0,000	2	1,606	0,000	2	1,606	0,000	2	1,606	0,000							
3	1,694	3	1,962	13,661	3	1,694	0,000	3	1,694	0,000	3	1,694	0,000	3	1,694	0,000							
4	3,719	4	3,789	1,845	4	3,721	0,049	4	3,719	0,003	4	3,719	0,000	4	3,719	0,000							
5	3,726	5	3,796	1,844	5	3,727	0,043	5	3,726	0,000	5	3,726	0,000	5	3,726	0,000							
6	4,840	-	-	-	-	-	-	6	4,840	0,000	6	4,840	0,000	6	4,840	0,000							
7	4,875	6	5,311	8,214	6	5,016	2,822	7	4,875	0,000	7	4,875	0,000	7	4,875	0,000							
8	5,044	-	-	-	-	-	-	8	5,044	0,000	8	5,044	0,000	8	5,044	0,000							
9	5,173	-	-	-	-	-	-	9	5,173	0,000	9	5,173	0,000	9	5,173	0,000							
10	5,412	-	-	-	7	5,051	6,679	10	5,412	0,000	10	5,412	0,000	10	5,412	0,000							
11	5,436	-	-	-	8	5,215	4,062	11	5,436	0,000	11	5,436	0,000	11	5,436	0,000							
12	5,704	-	-	-	9	5,819	1,987	12	5,704	0,000	12	5,704	0,000	12	5,704	0,000							
13	5,728	-	-	-	-	-	-	13	5,728	0,000	13	5,728	0,000	13	5,728	0,000							
14	5,854	-	-	-	-	-	-	14	5,854	0,000	14	5,854	0,000	14	5,854	0,000							
15	6,495	-	-	-	-	-	-	15	6,495	0,000	15	6,495	0,000	15	6,495	0,000							
16	6,787	7	7,206	5,824	10	7,435	8,718	15	7,473	9,188	16	6,787	0,000	16	6,787	0,000							
...							
89	11,830	-	-	-	-	-	-	89	11,830	0,000	89	11,830	0,000	89	11,830	0,000							
90	11,908	-	-	-	-	-	-	90	11,908	0,000	90	11,908	0,000	90	11,908	0,000							
91	12,037	-	-	-	-	-	-	91	12,037	0,000	91	12,037	0,000	91	12,037	0,000							
92	12,120	-	-	-	-	-	-	92	12,120	0,000	92	12,120	0,000	92	12,120	0,000							
93	12,319	-	-	-	-	-	-	93	12,319	0,000	93	12,319	0,000	93	12,319	0,000							
...							
301	23,927	95	23,926	0,004	95	23,926	0,004	-	-	-	158	23,921	0,025	301	23,932	0,021	301	23,928	0,004	301	23,927	0,000	
302	23,996	-	-	-	96	23,989	0,029	101	23,997	0,004	-	-	-	302	23,999	0,013	302	23,997	0,004	302	23,996	0,000	
303	24,110	-	-	-	97	24,187	0,318	102	24,111	0,004	159	24,003	0,444	303	24,156	0,190	303	24,111	0,004	303	24,110	0,000	
304	24,140	-	-	-	98	24,193	0,219	103	24,193	0,219	-	-	-	304	24,170	0,124	304	24,141	0,004	304	24,140	0,000	
305	24,158	96	24,187	0,120	-	-	-	104	24,222	0,264	160	24,186	0,116	305	24,189	0,128	305	24,159	0,004	305	24,158	0,000	
...
478	32,705	-	-	-	197	32,708	0,009	201	32,692	0,040	260	33,646	2,797	386	32,693	0,037	478	32,708	0,009	478	32,705	0,000	
479	32,727	213	33,779	3,114	198	32,748	0,064	202	32,702	0,076	261	33,795	3,160	387	32,728	0,003	479	32,741	0,043	479	32,727	0,000	
480	32,741	214	33,880	3,362	199	32,792	0,156	203	32,733	0,024	262	33,825	3,205	388	32,742	0,003	480	32,753	0,037	480	32,741	0,000	
481	32,882	215	33,937	3,109	200	32,899	0,052	204	32,800	0,249	263	33,894	2,986	-	-	-	481	32,884	0,006	481	32,882	0,000	
482	32,971	216	33,945	2,869	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	482	32,972	0,003	482	32,971	0,000	
...

3.3.6.2. Анализ результатов

В сводной таблице 3.18 приведены величины максимальных расхождений между динамическими характеристиками полной системы и подсистем с суперэлементами в различных частотных диапазонах, с учетом различного количества внутренних форм колебаний подконструкций.

Таблица 3.18. Величины максимальных расхождений между динамическими характеристиками полной системы и подсистем с суперэлементами

№ п/п	Исследуемый частотный диапазон	Метод фиксированной границы							
		 Модель 4				 Модель 5			
		Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %
1	до 3 Гц	до 3 Гц	0,012	до 6 Гц	0,006	до 3 Гц	0,038	до 6 Гц	0,030
2	до 6 Гц	до 6 Гц	0,029	до 12 Гц	0,006	до 6 Гц	1,231	до 12 Гц	1,192
3	до 12 Гц	до 12 Гц	0,097	до 24 Гц	0,015	до 12 Гц	1,192 пропуск	до 24 Гц	1,178
4	до 33 Гц	до 33 Гц	0,051	до 66 Гц	0,007	до 33 Гц	1,688 пропуск	до 66 Гц	0,295
№ п/п	Исследуемый частотный диапазон	Метод свободной границы							
		 Модель 4				 Модель 5			
		Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %
1	до 3 Гц	до 3 Гц	0,000	до 6 Гц	0,000	до 3 Гц	0,000	до 6 Гц	0,000
2	до 6 Гц	до 6 Гц	0,484	до 12 Гц	0,005	до 6 Гц	0,003	до 12 Гц	0,000
3	до 12 Гц	до 12 Гц	1,435	до 24 Гц	0,043	до 12 Гц	0,036	до 24 Гц	0,000
4	до 33 Гц	до 33 Гц	0,884 пропуск	до 66 Гц	0,038	до 33 Гц	0,145	до 66 Гц	0,005

Из таблицы 3.18 видно, что при учете внутренних форм подконструкции в том же частотном диапазоне, что и для полной системы, максимальное расхождение с эталонным решением (полученным с использованием полной КЭ-модели) составляет не более 1,688 %, однако в верхнем частотном диапазоне возникают пропуски отдельных форм колебаний. При увеличении частного

диапазона учтенных внутренних форм колебаний подконструкции вдвое, «пропуски» не обнаруживаются, а максимальное расхождение с полной системой составляет не более 1,192 % для отдельных форм, а в основном не превышает 0,050 %.

Отметим, что точность метода *фиксированной границы* выше, чем *свободной границы*, для случая подсистемы «основание – железобетонные конструкции каркаса», моделируемой в явном КЭ-виде, а «металлические конструкции покрытия» – как суперэлемента. При этом максимальные расхождения с полной КЭ-моделью системы составили 0,097 % и 0,015 % в зависимости от количества удержанных внутренних форм.

Метод *свободной границы* оказался более точным в другом случае, когда подсистема «металлические конструкции покрытия» моделируется в явном КЭ-виде, а «основание – железобетонные конструкции каркаса» – как суперэлемент. Максимальные расхождения с полной КЭ-моделью составили 0,145 % и 0,015 % в зависимости от количества удержанных внутренних форм.

Полученные результаты имеют следующее внятное физическое объяснение.

1. Внутренние формы колебаний подконструкции «металлические конструкции покрытия» при использовании метода *фиксированной границы* более точно отражают динамические характеристики реальной конструкции, в отличие от метода *свободной границы*. При методе *фиксированной границы* опорные узлы подконструкции жестко закреплены, что соответствует действительному опиранию конструкций покрытия. Метод *свободной границы* требует освобождения граничных степеней свободы, тем самым провоцируя появление форм колебаний как жесткого тела, не характерных для реальной конструкции.

2. Внутренние формы колебаний подконструкции «основание – железобетонные конструкции каркаса» при использовании метода *свободной границы* наиболее точно отражают динамические характеристики реальной конструкции. Применение метода *фиксированной границы* требует дополнительных кинематических ограничений для подконструкции в точках

опирания подсистемы «металлические конструкции покрытия», что негативно сказывается на близости частот и форм собственных колебаний подконструкции с таковым для полной модели.

Вычислительная эффективность разработанной методики на задачах такой «малой» размерности, как представленная в этом верификационном примере, оказалась ожидаемо незначительной. При определении частот и форм колебаний в диапазонах до 12 Гц «машинное» время, затраченное на расчет с применением суперэлемента, в целом меньше чем на расчет полной системы. В диапазоне до 33 Гц преимущество суперэлементного подхода менее выражено или совсем отсутствует.

Суммарное «машинное» время, затраченное на формирование суперэлемента и расчет с его применением собственных частот и форм колебаний в диапазонах до 12 Гц сопоставимо с расчетом полной системы. Для расчетов в диапазоне до 33 Гц значительную долю временных затрат занимает определение внутренних форм колебаний подконструкции, особенно для метода свободной границы.

3.4. Выводы по главе 3

1. На верификационных задачах показана применимость и «организационная» эффективность разработанной суперэлементной методики с использованием выбранных вариантов метода динамического синтеза подконструкций для анализа динамических характеристик систем «основание – железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия».

2. Сопоставление вычисленных собственных частот и форм колебаний входного блока на КЭ-моделях различной подробности показало, что оптимальным по точности результатам и вычислительной размерности соответствует разбиение модели по 3-4 конечных элемента на один конструктивный элемент сооружения (пролет плиты, балка, колонна, элемент фермы покрытия).

3. Сравнительный анализ вычисленных динамических характеристик полной системы «основание – железобетонные конструкции каркаса –

металлоконструкции покрытия» и подсистем показал значимое влияние податливости опорной подсистемы на поведение подсистемы конструкций покрытия. Это свидетельствует о невозможности проведения независимых расчетов подсистем «основание – железобетонные конструкции каркаса» и «металлические конструкции покрытия»

4. Сопоставление собственных частот и форм колебаний полной системы, моделируемой «в лоб» конечными элементами, и подсистем с суперэлементами (здесь и далее подсистемой с суперэлементом для краткости обозначена полная система, в которой одна из подсистем моделируется конечными элементами, а вторая – динамическим суперэлементом) показывает практически идентичные результаты. Различие по собственным частотам при учете достаточного количества внутренних форм колебаний подконструкций для метода фиксированной границы составило, в основном, не более 0,007 %, а для отдельных форм – до 0,295 %. Для метода свободной границы – в основном, не более 0,005 %, а для отдельных форм колебаний – до 0,038 %.

5. Количество внутренних форм колебаний подконструкций, которое необходимо учесть для получения адекватного результата, существенно зависит от жесткостных и инерционных характеристик самой конструкции. Для сооружений рассматриваемого типа необходим учет внутренних форм колебаний подконструкции в частотном диапазоне в 1,5 - 2 раза превышающем исследуемый частотный диапазон всей системы.

6. Для рассмотренной задачи «малой» размерности (имея в виду реальные уникальные сооружения) фактор вычислительной эффективности, как показал сравнительный анализ с полными КЭ-моделями, ожидаемо не является сильной стороной разработанной суперэлементной методики.

ГЛАВА 4. АПРОБАЦИЯ СУПЕРЭЛЕМЕНТНОЙ МЕТОДИКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ «ОСНОВАНИЕ – ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ – МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ПОКРЫТИЯ»

Разработанная суперэлементная методика апробирована на двух реальных системах «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия». Объектами исследования выбраны спроектированные и построенные к чемпионату мира по футболу 2018 года стадионы большой вместимости (45 000 зрителей): в Нижнем Новгороде (рисунок 4.1) и Ростове-на-Дону (рисунок 4.6) как показательные примеры применения всех ветвей разработанной методики [111].

Подробные описания несущих конструкций исследуемых стадионов и характеристики материалов приведены в параграфе 4.1. Конечноэлементные модели, с описанием их особенностей, типов используемых элементов и параметров, принятых в расчетах представлены в параграфе 4.2.

В разделах 4.3 и 4.4 приведены результаты апробации разработанной суперэлементной методики на примерах стадионов Нижнем Новгороде и Ростове-на-Дону соответственно.

В параграфе 4.5 представлен анализ вычислительной эффективности разработанной методики.

Выводы по главе 4 приведены в разделе 4.6.

4.1. Описание конструкций исследуемых стадионов

4.1.1. Описание конструкций стадиона в г. Нижний Новгород

Футбольный стадион в г. Нижний Новгород («Нижний Новгорода – Арена»), вместимостью 45 000 зрителей, расположен на стрелке, в месте впадения Оки в Волгу. Строительство завершено в марте 2018г.

Система несущих конструкций стадиона включает в себя следующие группы элементов:

- Железобетонные конструкции фундамента и чаши трибун;
- Металлические конструкции покрытия;
- Конструкции обходной галерея с выходными пандусами.



Рисунок 4.1. – Фотография стадиона в г. Нижний Новгород

Описание железобетонных конструкций фундамента и чаши трибун

Конструктивная схема чаши трибун и подтрибунных помещений сооружения представляет собой монолитный железобетонный каркас – систему монолитных железобетонных рам, расположенных вокруг футбольного поля (в радиальном направлении). Рамы объединяются в пространственную конструкцию, жестко опирающимися на ригели рам монолитными железобетонными перекрытиями с балочными элементами складок трибун. В радиальных рамах предусмотрены колонны квадратного и прямоугольного

сечения, ригели прямоугольного сечения, гладкая неразрезанная плита перекрытия.

Устойчивость каркаса, а также его геометрическая неизменяемость обеспечивается жесткостью узлов сопряжения элементов каркаса совместно с диафрагмами перекрытий и крестовидными металлическими связями. Пространственная жесткость каркаса чаши обеспечивается совместной работой всех несущих железобетонных конструкций.

Все конструкции чаши стадиона, зон фойе и обходной галереи разделены температурно-усадочными деформационными швами (рисунок 4.2).

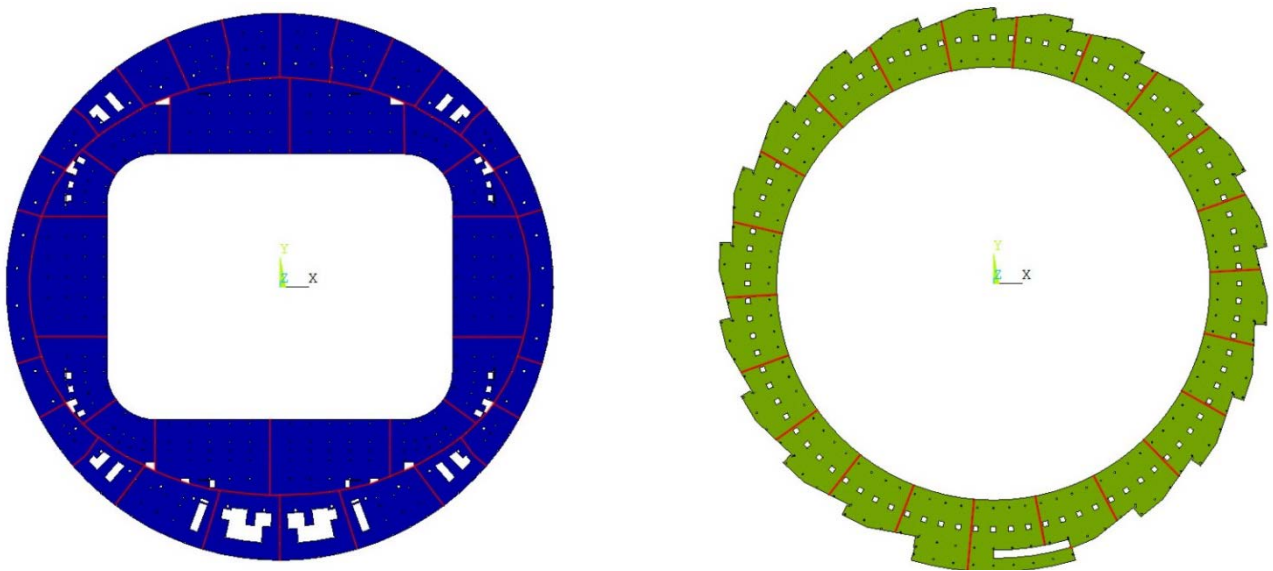


Рисунок 4.2. – Схема расположения деформационных швов в чаше и фойе стадиона, а также в обходной галерее

Связь между соседними деформационными блоками обеспечиваются устройством с одной его стороны скользящего опирания, за счет фторопластовых пластин, заложенных в ригель и плиту перекрытия (рисунок 4.3).

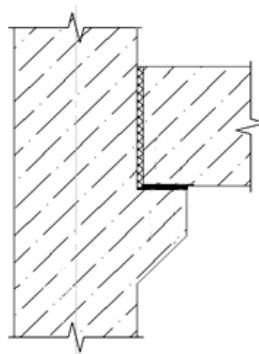


Рисунок 4.3. – Устройство деформационного шва

Значения жёсткостей свай в продольном (вертикальном) и поперечных направлениях принимались по данным НИИОСП им. Герсеванова.

По жесткости сваи разделены на два типа. Под чашей трибун стадиона расположены сваи с жесткостью в продольном (вертикальном) направлении - 41202 кН/м, в поперечном (горизонтальном) направлении - 8240 кН/м для свай. Под фундаментами зоны фойе сваи с жесткость в продольном направлении - 15696 кН/м, в поперечном направлении 3139 кН/м. Картина свайного поля представлена на рисунке 4.4. Общее число свай – 9945 шт.

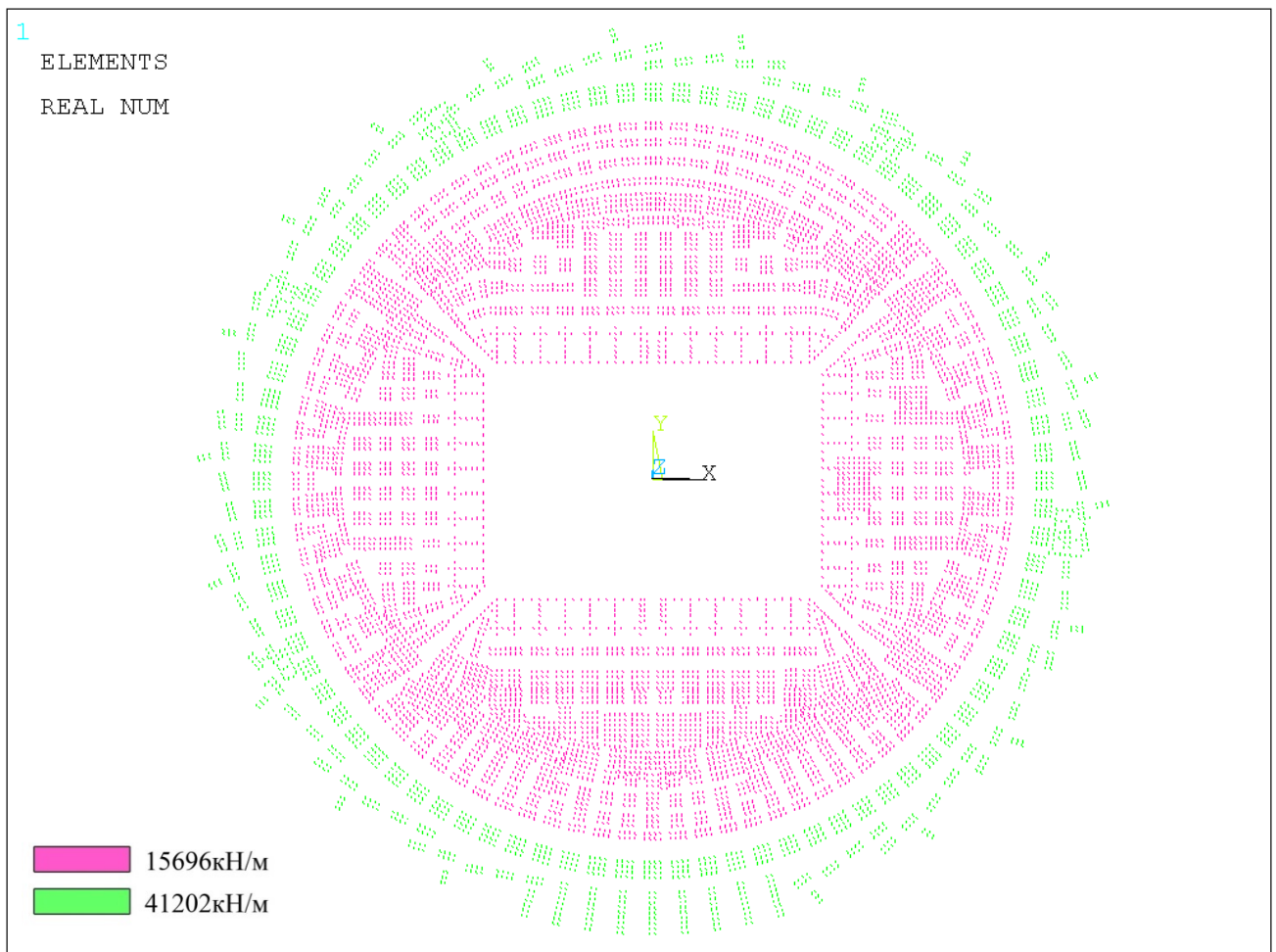


Рисунок 4.4. Общий вид свайного поля. Сваи, показанные зеленым цветом, имеют продольную жесткость 41202 кН/м, поперечную жесткость 8240 кН/м. Сваи, показанные фиолетовым цветом, имеют продольную жесткость 15696 кН/м, поперечную жесткость 3139 кН/м.

Плитный фундаментный ростверк имеет различные толщины, схема приведена на рисунке 4.5.

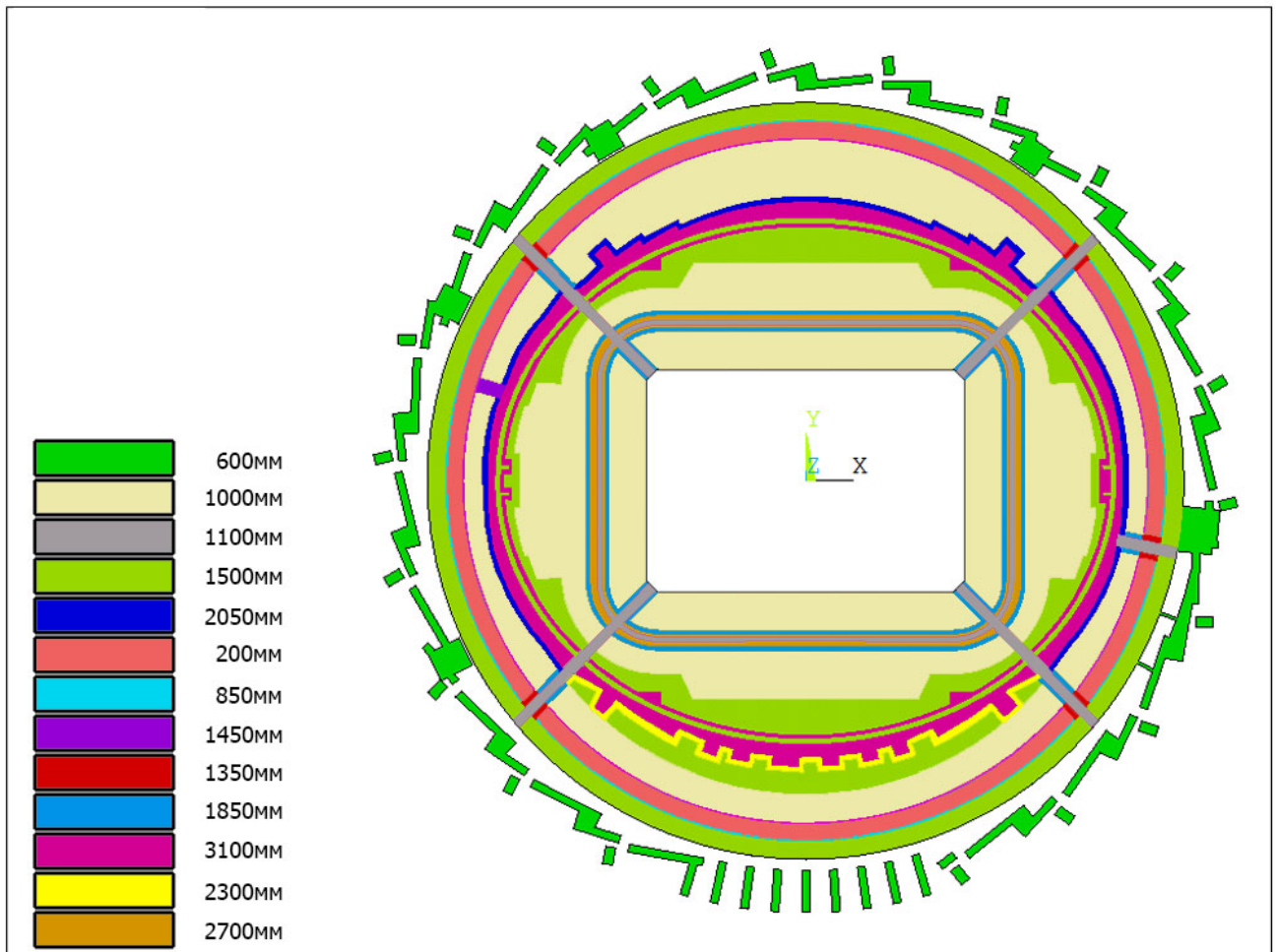


Рисунок 4.5. – План плитного ростверка с указанием толщин, мм.

Несущие стены расположены в угловых проездах между отметками 0,000м и 8,250 м, имеют толщину 400 мм. Лифтовые шахты имеют прямоугольное сечение, толщины стен 250 мм и 300 мм.

С внешней стороны в зонах фойе расположены многоуровневые лестницы, опоясывающие зоны фойе по спирали.

Перекрытия устроены в отметках 8,250 м, 12,450 м, 16,650 м, 20,850 м и имеют толщину 270 мм.

Рамы монолитного каркаса состоят из колонн прямоугольного сечения 600×600 мм и 600×1200 мм и ригелей сечением 600×900 мм.

Для опирания покрытия предусмотрено два контура железобетонных колонн. Внешний контур – колонны треугольного сечения (равносторонний

треугольник со стороной 2400 мм), расположены по окружности радиусом 288 м в зоне обходной галереи. Внутренний контур – колонны круглого сечения 1400 мм, расположены в зоне чаши трибун.

Монолитная железобетонная гребенка трибун расположена в два ярус. Горизонтальная составляющая ступени толщиной 100 мм, вертикальная 200 мм. Гребенка трибун опирается на наклонные железобетонные балки сечением 600х1200 мм.

Описание металлических конструкций покрытия.

Покрытие стадиона в плане круглое, диаметром 290,0 м, представляет собой радиально-кольцевую стержневую оболочку, запроектировано единым температурным блоком без устройства деформационных швов. Конструкции покрытия можно условно разделить на две зоны: покрытие над трибунами и покрытие над фойе.

Основные несущие элементы покрытия над трибунами – 44 радиальные треугольные консольные фермы, 3 плоские кольцевые фермы и внешнее опорное кольцо.

Радиальные консольные фермы плоские, решетчатые из стальных сварных двутавров. Высота конструкции на кольцевой ферме 14,5 м, вылет радиальных ферм-консолей 60,29 м. Фермы-консоли опираются на железобетонные колонны, установленные по эллипсу 206,7×243,8 м, жестко защемленные в фундаменте, опирание ферм на колонны – шарнирно-неподвижное. Фермы объединяются между собой внешним опорным кольцом, выполненным из сварного двутаврового сечения с обрамлением кромок поясов. Опирание внешнего опорного кольца на фермы – жесткое.

Кольцевые фермы обеспечивают пространственную работу покрытия. Каждый сегмент кольцевых ферм покрытия представляет собой плоскую ферму из сварных двутавров. Две внутренние кольцевые фермы, совместно с элементами радиальных ферм, горизонтальных связей и внутренней окаймляющей балкой покрытия образуют единую пространственную конструкцию внутреннего опорного кольца.

В уровне верхних поясов радиальных ферм предусмотрена система горизонтальных связей и распорок, обеспечивающих раскрепление поясов ферм и пространственную работу покрытия в целом.

Покрытие над фойе

Покрытие над зоной фойе образовано 88-ю шпренгельными балками пролетом от 22,400 до 40,800 м, расположенными в створе радиальных консольных ферм покрытия над трибунами и между ними.

Балки сварные, двутаврового сечения, шпренгельная система выполнена из холодногнутого стального профиля. Опирание балок по внешнему контуру покрытия – шарнирное, на железобетонные колонны внешнего контура. По внутреннему контуру балки опираются на опорные узлы радиальных ферм покрытия над трибунами и на внешнее опорное кольцо, в обоих случаях опирание шарнирное.

Между собой балки соединены системой горизонтальных связей и распорок, обеспечивающих жесткий диск покрытия и раскрепление сжатых поясов, но не участвующих в пространственной работе покрытия. Система связей разбита на 8 радиальных блоков, связанных друг с другом только наружным кольцом распорок по опорным узлам.

По верхним поясам балок запроектирована система прогонов (сварные двутавры) покрытия, установленных с максимальным шагом 3,5 м. Опирание на балки выполнено подвижным вдоль оси прогонов для исключения вовлечения прогона в работу покрытия, для восприятия скатной составляющей вертикальных нагрузок между прогонами предусмотрена система тяжей. По прогонам устраивается подсистема для крепления сотового поликарбоната.

Описание конструкции обходной галереи

Обходная галерея выполнена из железобетона. Представляет собой каркас из колонн и ригелей, объединенных плитой перекрытия на отм. 8,250 м. В конструкции обходной галереи предусмотрены лестницы, пандусы и переходы в зону фойе стадиона.

Материалы несущих конструкций

Основные несущие конструкции чаши стадиона, такие как, плиты фундамента и перекрытий, колонны и балки – выполнены из тяжелого бетона класса В35, гребенка трибун – В40. Рабочая арматура принята класса А500С, хомуты – А400 и А230.

В качестве основных материалов конструкций покрытия используются стали С390 (сварные профили) и С345 (фасонные квадратные трубы).

Физико-механические характеристики материалов несущих конструкций стадиона в Нижнем Новгороде приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Физико-механические характеристики материалов несущих конструкций стадиона в Нижнем Новгороде

<i>Бетон В35</i>	
Плотность ρ , $т/м^3$	2.500
Модуль упругости E , $Па$	3.45×10^{10}
Коэффициент Пуассона ν	0.2
<i>Бетон В40</i>	
Плотность ρ , $т/м^3$	2.500
Модуль упругости E , $Па$	3.60×10^{10}
Коэффициент Пуассона ν	0.2
<i>Сталь С345, С390</i>	
Плотность ρ , $т/м^3$	7.850
Модуль упругости E , $Па$	2.10×10^{11}
Коэффициент Пуассона ν	0.3

4.1.2. Описание конструкций стадиона в г. Ростов-на-Дону

Футбольный стадион в Ростове-на-Дону («Ростов – Арена»), вместимостью 45 000 зрителей в режиме FIFA (37 868 зрителей в режиме «Наследие»), расположен на левом берегу реки Дон.

Система несущих конструкций стадиона включает в себя следующие группы элементов:

- Железобетонные конструкции фундамента и чаши трибун;
- Металлические конструкции покрытия;
- Конструкции обходной галерея с выходными пандусами.



Рисунок 4.6. Первоначальный архитектурный проект стадиона
в г. Ростов-на-Дону

Описание железобетонных конструкций фундамента и чаши трибун.

Основными несущими конструкциями чаши трибун футбольного стадиона сооружения являются система монолитных железобетонный элементов, состоящая из колонн, пилонов, стен, перекрытий, балок. Колонны круглого сечения железобетонного балочного каркаса, балки и плиты перекрытий

формируют систему несущих конструкций чаши трибун. Сетка колонн каркаса принята переменной: от 7275×7650 до 7650×9600 мм.

Общая пространственная устойчивость здания обеспечивается совместной работой всех элементов монолитного железобетонного каркаса.

Стадион разделен на блоки антисейсмическими швами. Ширина шва 150 мм.

Высота сооружения над уровнем земли (до верха кровли) – 37,200 м.

Фундаменты приняты свайными и свайно-плитными, нескольких типов (рисунок 4.7):

- в виде монолитных железобетонных ростверков под колонны, $h = 800$ мм;
- в виде монолитных железобетонных ленточных ростверков под стены, $700 \times 800(h)$ мм, $1650 \times 800(h)$ мм;
- комбинированными, монолитными железобетонными свайно-плитным в зоне колонн под конструкции покрытия, толщина фундаментной плиты – 4700 мм. Толщина фундаментной плиты назначена из условия анкеровки растянутой оттяжки конструкции покрытия.

Ростверки связаны между собой монолитными железобетонными лентами в двух направлениях. Габариты лент – $400 \times 800(h)$ мм.

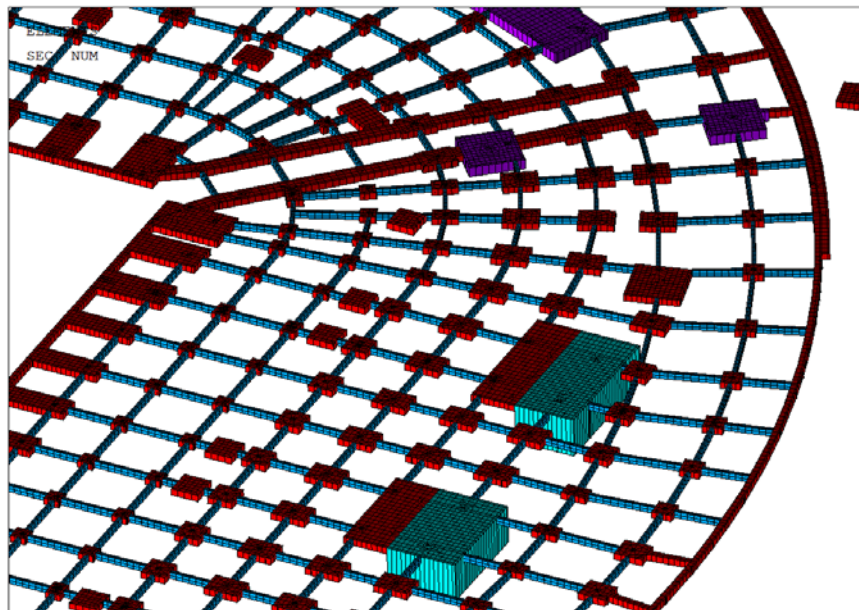


Рисунок 4.7. Фрагмент конечноэлементной модели ростверков стадиона в Ростове-на-Дону.

Сваи применяются сборные железобетонные составные сплошного квадратного сечения 350×350 мм. Заделка свай в ростверк принята жесткой.

Значения жёсткостей свай в продольном (вертикальном) и поперечных направлениях принимались по данным НИИОСП им. Герсеванова.

Сваи разделены на шесть по жесткости. В продольном (вертикальном) направлении жесткости свай приняты от 7000 до 20000 кН/м, в поперечном (горизонтальном) направлении, составляют 10 % от жесткости в продольном направлении. Общее число свай – 11 091 шт.

При динамических расчетах жесткости свай были увеличены в 10 раз.

Схемы расстановки свай с указанием продольных (горизонтальных) жесткостей приведены на рисунке 4.8.

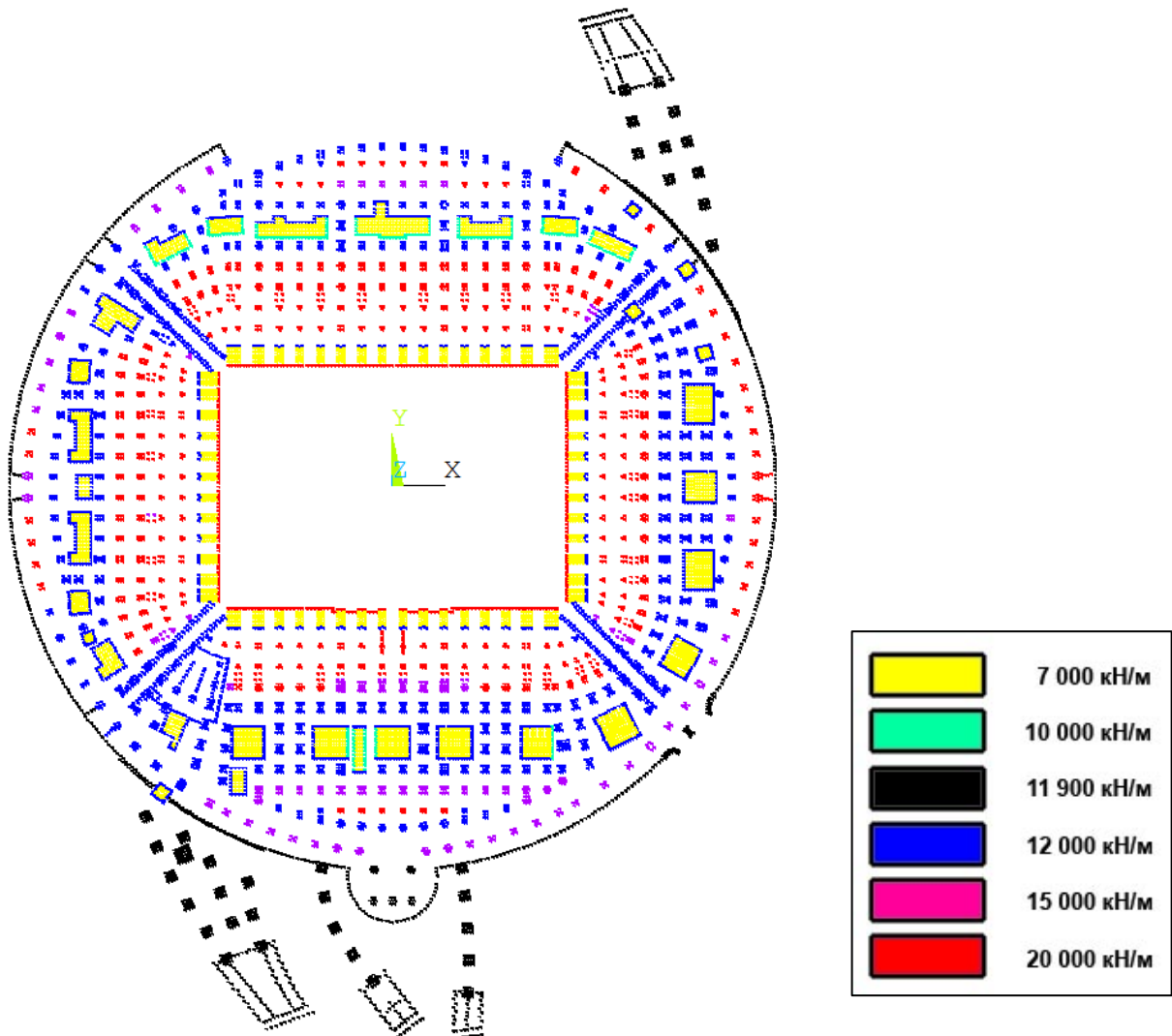


Рисунок 4.8. Общий вид свайного поля стадиона в г. Ростов-на-Дону с указанием продольных (горизонтальных) жесткостей

Нагрузка от металлических конструкций покрытия воспринимается основными несущими колоннами, выполненными монолитными железобетонными круглого сечения диаметром 1200 мм.

Колонны каркаса запроектированы монолитными железобетонными круглого сечения диаметром 600 мм.

Монолитные железобетонные стены лифтовых шахт, стены лестничных клеток, стен жесткости, приняты толщиной 250 мм, 300 мм, 400 мм. Внешние монолитные железобетонные стены приняты толщиной – 250 мм. Также из монолитного железобетона выполнены лестничные марши внутренних и фасадных лестниц, пандусы.

Перекрытия имеют толщину 220 мм, выполнены монолитными железобетонными. Балки перекрытий и трибун устроены в двух направлениях, сечением 400×800(h) мм – поперек трибун, 400×600(h) мм – вдоль трибун. Армирование балок принято симметричным.

Гребенка трибун запроектирована сборной железобетонной. Горизонтальные участки и вертикальные стенки настила трибун имеют толщину 150 мм.

Описание металлических конструкций покрытия

Покрытие футбольного стадиона в г. Ростов-на-Дону представляет собой два крыла Г-образной и S-образной форм с размерами сторон в плане 147×108×80 м каждое, расположенные над северо-восточной и юго-западной трибунами (см. рисунок 4.9).

Покрытия стадиона формируется 34 консолями, представляющими собой плоские конструкции Г-образной формы переменной высоты. Каждая консоль состоит из плоской решетчатой фермы вылетом 51,7 м в сторону поля и высотой сечения 7 м в месте крепления оттяжки над трибунами, вертикальных стоек и системы жестких оттяжек. Вертикальные стойки установлены на монолитные железобетонные трибуны на шарнирно-неподвижных опорах.

Решетчатая ферма поддерживается системой жестких оттяжек, шарнирно и опирается на монолитные железобетонные конструкции в уровне отм. 0,000 м через шарнирно-неподвижную опору. Устойчивость Г-образных консолей из плоскости обеспечивается главным внутренним и внешним ригелем, хребтовой фермой по оси «И». Главный ригель представляет собой трехгранную трехпоясную решетчатую конструкцию, высотой 7 м. Все описанные решетчатые конструкции запроектированы из стальных труб круглого сечения. Горизонтальные связи покрытия, запроектированные в уровне верхних поясов консолей, обеспечивают пространственную работу покрытия, а также создают жесткий диск. Основные трубчатые элементы конструкций запроектированы из стали марки С440 по ГОСТ 27772-88.

Горизонтальные связи приняты прутковыми. Кровля стадиона – мембранная. На скатных участках предусмотрены устройства для снегозадержания.

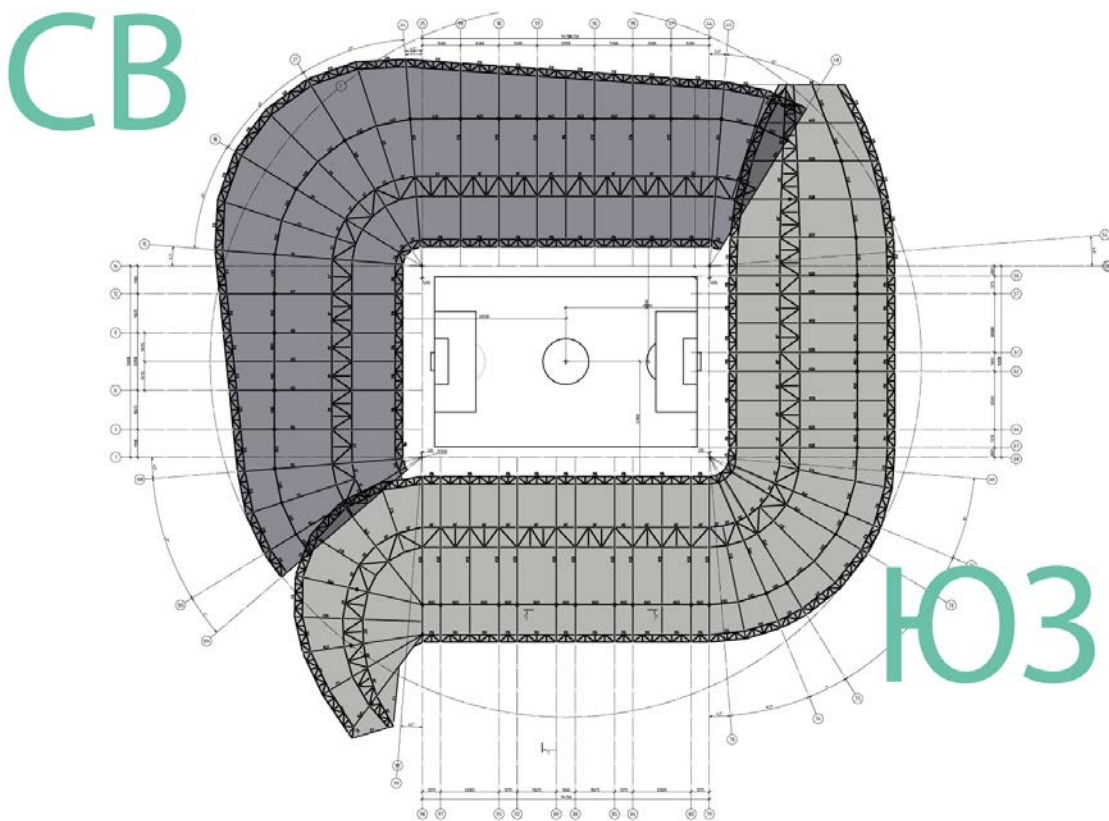


Рисунок 4.9. – Схема покрытия стадиона в г. Ростов-на-Дону.

СВ – северо-восточное крыло, ЮЗ – юго-западное крыло

Общая устойчивость покрытия обеспечивается совместной работой консолей, хребтовой фермы, треугольного ригеля, горизонтальных связей, опорной стойкой и системой оттяжек. Местная устойчивость отдельных элементов в плоскости покрытия обеспечивается стальными связями.

Описание конструкций обходной галереи

Обходная галерея представляет собой каркас из колонн и ригелей, объединенных плитой перекрытия на отм. 8,250 м. В конструкции обходной галереи предусмотрены лестницы, пандусы и переходы в зону чаши стадиона.

Материалы несущих конструкций

Основные несущие конструкции чаши стадиона, такие как плиты перекрытий, стены, колонны и балки, гребенка трибун выполняются из тяжелого бетона класса В35. Ростверк выполнен из бетона класса В30. Рабочая арматура принята класса А500С, хомуты – А400 и А230. В качестве основных материалов конструкций покрытия используется сталь С440.

Физико-механические характеристики материалов несущих конструкций стадиона в Ростове-на-Дону приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2. Физико-механические характеристики материалов несущих конструкций стадиона в Ростове-на-Дону

<i>Бетон В30</i>	
Плотность ρ , $т/м^3$	2,500
Модуль упругости E , $Па$	$3,25 \times 10^{10}$
Коэффициент Пуассона ν	0,2
<i>Бетон В35</i>	
Плотность ρ , $т/м^3$	2,500
Модуль упругости E , $Па$	$3,45 \times 10^{10}$
Коэффициент Пуассона ν	0,2
<i>Сталь С440</i>	
Плотность ρ , $т/м^3$	7,850
Модуль упругости E , $Па$	$2,10 \times 10^{11}$
Коэффициент Пуассона ν	0,3

4.2. Описание расчетных КЭ-моделей исследуемых стадионов

4.2.1. Расчетные КЭ-модели стадиона в г. Нижний Новгород

На основании анализа и обобщения актуальной проектной документации в программном комплексе ANSYS Mechanical построены и верифицированы следующие пространственные оболочечно-стержневые конечноэлементные модели несущих конструкций стадиона в г. Нижний Новгород:

1. полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» (рисунки 4.10, 4.11);

2. подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун»;

3. подсистемы «металлические конструкции покрытия»;

4. подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» с учетом подсистемы «металлические конструкции покрытия» как суперэлемента;

5. подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» как суперэлемента.

Вычислительная размерность построенных ANSYS-моделей – до 633 461 узла (3 800 766 степеней свободы) и 699 383 конечных элемента.

Общий вид, размерность и типы используемых элементов, построенных КЭ-моделей стадиона в Нижнем Новгороде приведены в таблице 4.3.

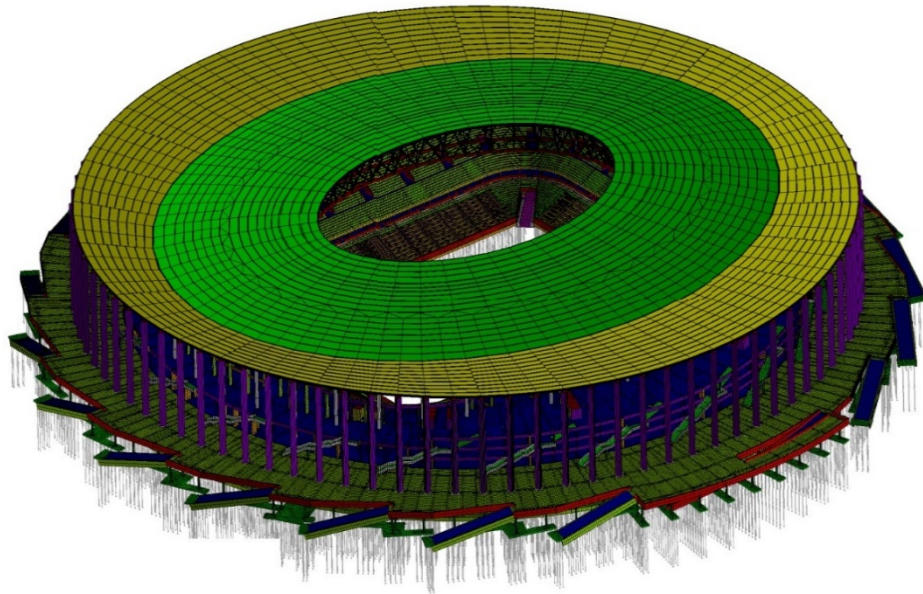


Рисунок 4.10. Конечноэлементная модель полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» стадиона в Нижнем Новгороде.

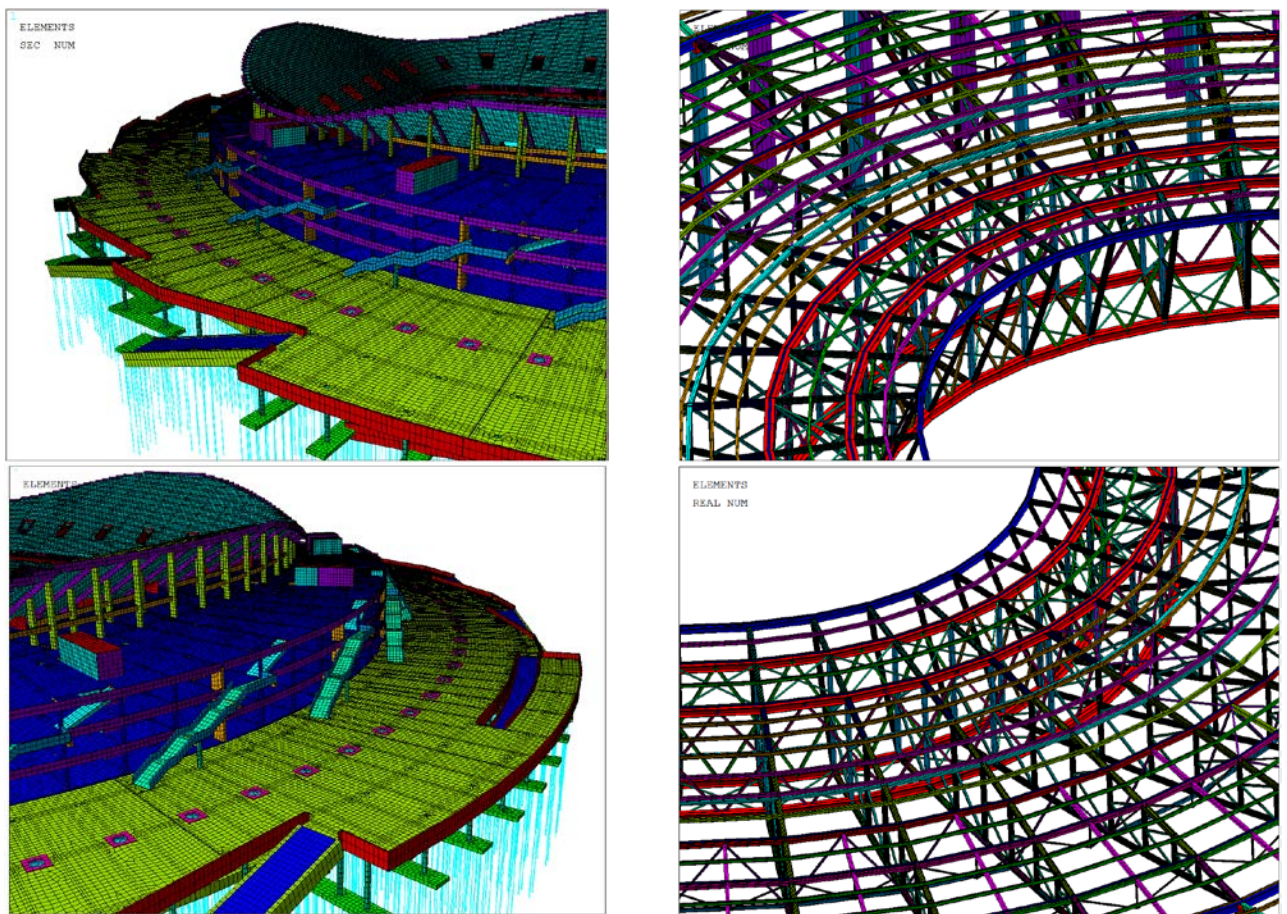
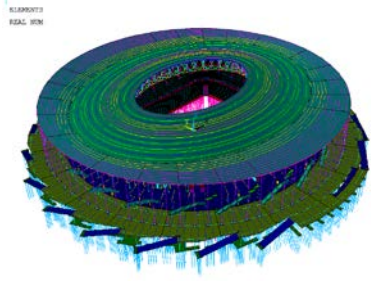
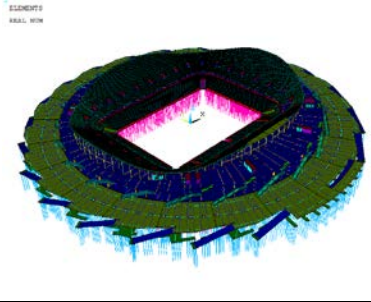
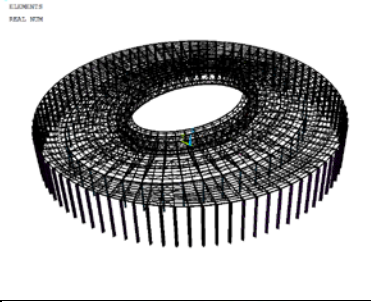
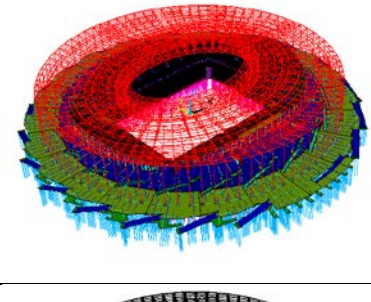
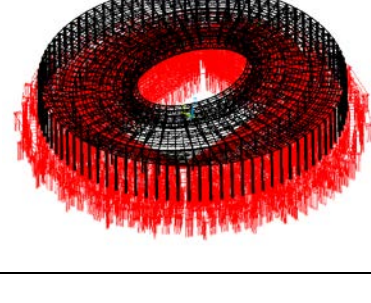


Рисунок 4.11. Фрагменты конечноэлементной модели полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» стадиона в Нижнем Новгороде

Таблица 4.3. Разработанные расчетные КЭ-модели несущих конструкций стадиона в Нижнем Новгороде.

№	КЭ-модели системы/подсистемы	Изображение	Кол-во узлов	Кол-во элементов	Типы КЭ
1.1	«основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия»		633 461	699 383	SHELL181 BEAM188 MPC184 SURF154 LINK180 COMBIN14
1.2	«основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун»		624 127	684 500	SHELL181 BEAM188 MPC184 SURF154 COMBIN14
1.3	«металлические конструкции покрытия»		9 728	15 102	BEAM188 MPC184 SURF154 LINK180
1.4	«основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» + суперэлемент покрытие		624 127	684 501	SHELL181 BEAM188 MPC184 SURF154 COMBIN14 MATRIX50
1.5	«металлические конструкции покрытия» + суперэлемент фундаменты и трибуны		9 728	15 103	BEAM188 MPC184 SURF154 LINK180 MATRIX50

4.2.2. Расчетные КЭ-модели стадиона в г. Ростов-на-Дону

На основании актуальной проектной документации, её анализа и обобщения программном комплексе ANSYS Mechanical построены и верифицированы следующие пространственные оболочечно-стержневые конечноэлементные модели несущих конструкций стадиона в г. Ростов-на-Дону:

1. полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» (рисунки 4.12, 4.13);
2. подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун»;
3. подсистемы «металлические конструкции северо-восточного крыла покрытия»;
4. подсистемы «металлические конструкции юго-западного крыла покрытия»;
5. подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» с учетом металлических конструкции покрытия как суперэлемента;
6. подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом железобетонных конструкций основания и трибун как суперэлемента.

Вычислительная размерность построенных ANSYS-моделей – до 621 048 узлов (3 726 288 степеней свободы) и 604 358 конечных элемента.

Общий вид, размерность и типы используемых элементов, построенных КЭ-моделей стадиона в Ростове-на-Дону приведены в таблице 4.4.

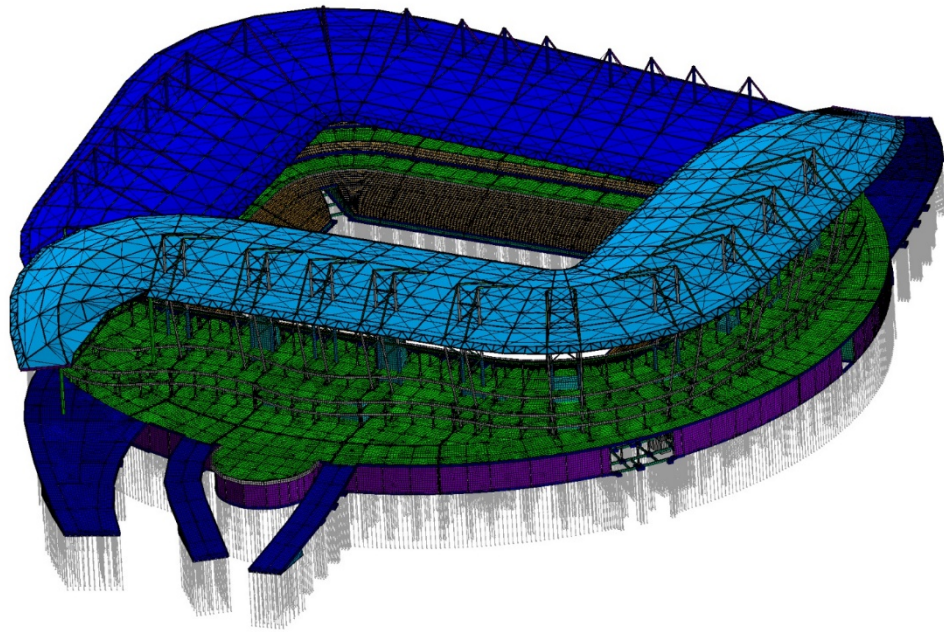


Рисунок 4.12. Конечноэлементная модель полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» стадиона в Ростове-на-Дону.

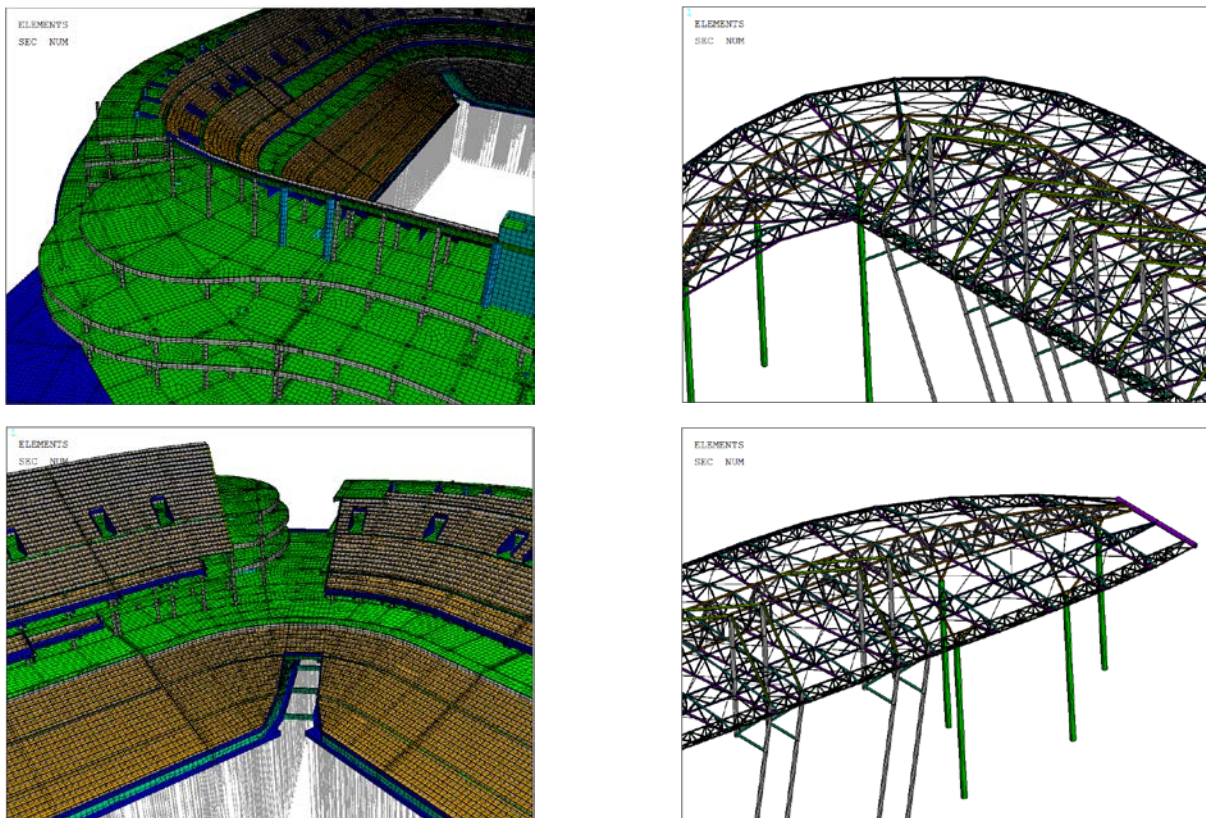
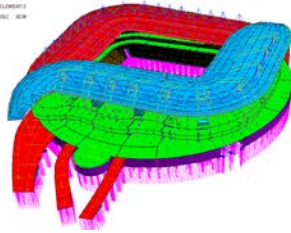
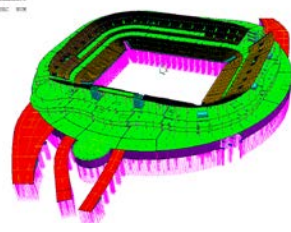
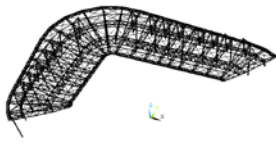
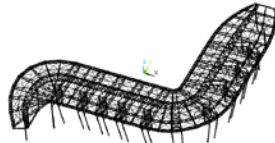
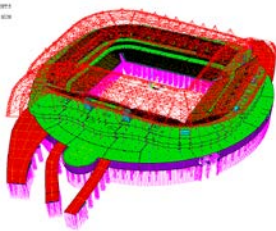
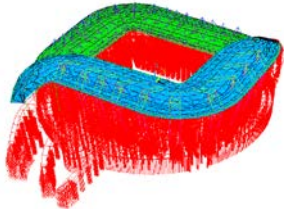


Рисунок 4.13. Фрагменты конечноэлементной модели полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» стадиона в Ростове-на-Дону

Таблица 4.4. Разработанные расчетные КЭ-модели несущих конструкций стадиона в Ростове-на-Дону.

№	КЭ-модели системы/подсистемы	Изображение	Кол-во узлов	Кол-во элементов	Типы КЭ
2.1	«основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия»		621 048	604 358	SHELL181 BEAM188 MPC184 SURF154 LINK180 COMBIN14
2.2	«основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун»		599 417	589 387	SHELL181 BEAM188 MPC184 SURF154 COMBIN14
2.3	«металлические конструкции северо-восточного крыла покрытия»		9 185	6 304	BEAM188 LINK180 SURF154
2.4	«металлические конструкции юго-западного крыла покрытия»		12 446	8 667	BEAM188 LINK180 SURF154
2.5	«основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» + суперэлемент покрытия		599 417	589 388	SHELL181 BEAM188 MPC184 SURF154 COMBIN14 MATRIX50
2.6	«металлические конструкции покрытия» + суперэлемент фундаменты и трибуны		21 651	14 972	BEAM188 LINK180 SURF154 MATRIX50

4.2.3. Описание особенностей, разработанных КЭ-моделей несущих конструкций футбольных стадионов

При создании модели длина грани конечного элемента принята в среднем 0.7 – 0.8м. Сетка конечных элементов на плитах фундамента и перекрытий сгущена в зонах соединения с колоннами и стенами и обладает необходимой подробностью для воспроизведения динамических характеристик, перемещений, сил и моментов. Так же следует отметить, что принятый размер конечных элементов позволяет сохранить адекватную вычислительную размерность задачи

Для моделирования фундаментных плит, плит перекрытий, стен, лестничных и лифтовых шахт, гребенки трибун, балок под гребенкой трибун использовались четырёхугольные и треугольные в плане КЭ оболочки средней толщины типа SHELL181, реализующие теорию Миндлина-Рейсснера. Балки и колонны выполнены стержневыми КЭ типа BEAM188 – пространственный балочный элемент, реализующий теорию Тимошенко. Для задания шарнирного опирания в местах устройства деформационных швов (модели стадиона в Нижнем Новгороде) использовались связи по степеням свободы. MPC184 – элемент кинематических ограничений. Конечные элементы такого типа с опцией «жёсткая балка» введены в местах стыковки плит перекрытий и фундаментной плиты с колоннами, а учитывающие эксцентриситеты – в местах стыковки опорных конструкций покрытия с железобетонными конструкциями. Для задания нагрузок на кровлю, а также на наклонные лестничные марши были введены элементы поверхностных эффектов типа SURF154. Сваи моделируются специальными конечными элементами типа COMBIN14 – пружины с заданной жесткостью.

Несущие элементы конструкции покрытия моделировались в основном с использованием элементов типа BEAM188. Пространственный стержневой элемент типа LINK180, работающий на растяжение или сжатие применялся для моделирования стержней ферм. Оболочка покрытия моделировалась элементами SHELL181. MATRIX50 – суперэлемент, группа предварительно собранных КЭ, представленная редуцированными матрицами (жесткости, масс, нагрузок).

4.2.4. Параметры расчетов

Для полной системы и подсистем, включающих в свой состав конструкции фундаментов основание принято динамическим: жесткость свай увеличена в 10 раз. Подсистемы конструкций покрытия закреплены жестко или шарнирно в соответствии с конструктивными решениями опорных узлов.

Решение СЛАУ выполнялось прямым разреженным методом. Для вычисления собственных частот и форм колебаний использовался прямой блочный метод Ланцоша. Расчеты проводились с учетом масс только от собственного веса несущих конструкций. Для каждой системы/подсистемы были вычислены частоты и формы собственных колебаний в диапазоне до 6 Гц. В расчетах с использованием суперэлементов учет внутренних форм колебаний подконструкции производился методами фиксированной границы и свободной границы. Количество внутренних форм колебаний подконструкции варьировалось. Учитывались частоты внутренних колебаний, попадающие в интервалы: до 3 Гц, 6 Гц, 9 Гц, 12 Гц (таблицы 4.7 и 4.13).

4.3. Результаты расчетов стадиона в Нижнем Новгороде

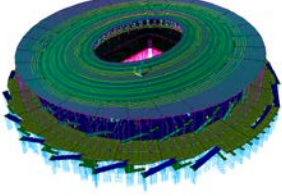
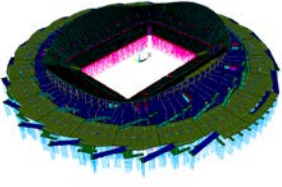
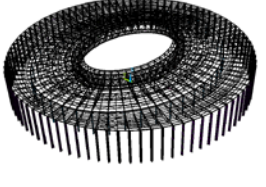
4.3.1. Результаты динамического расчета полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» и составляющих её подсистем

В данном параграфе представлены основные результаты динамического расчета полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» и составляющих её подсистем стадиона в Нижнем Новгороде. Собственные частоты и формы колебаний вычислены с учетом массы только от собственного веса несущих конструкций.

В таблице 4.5 приведены вычисленные частоты собственных колебаний полной системы (модель 1.1) и составляющих её подсистем без использования суперэлементов (модели 1.2 и 1.3). В таблице 4.6 выборочно показаны соответствующие собственные формы колебаний. Δ в указанных таблицах – максимальная разница, выраженная в процентном отношении, частот собственных колебаний полной системы и подсистем. Зеленым фоном в таблицах отмечены частоты собственных колебаний полной системы и подсистем, на которых формы колебаний совпадают. Оранжевым фоном выделены те частоты колебания полной системы, которым не соответствуют формы колебания подсистем или отсутствуют вовсе. Красным отмечены те частоты колебаний подсистем, на которых формы колебаний не соответствуют формам полной системы, либо отсутствуют.

В приведенных ниже таблицах данные расположены таким образом, что в одной строке приведены частоты, близкие по величине, а также имеют сходные или совпадающие форм собственных колебаний.

Таблица 4.5. Сопоставление собственных частот колебаний полной системы (модель 1.1) и составляющих её подсистем без использования суперэлементов (модели 1.2 и 1.3) стадиона в Нижнем Новгороде.

 Модель 1.1		 Модель 1.2		 Модель 1.3		Δ, %
№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	№	Частота, Гц	
1	0,4116			1	0,4381	6,040
2	0,4177			2	0,4447	6,069
3	0,4701			3	0,4906	4,174
4	0,7132			4	0,7350	2,969
5	0,7428			5	0,7713	3,702
6	0,8763			6	0,9013	2,777
7	0,9120			7	0,9359	2,550
8	0,9256	1	0,9299			0,465
9	0,9596			9	0,9897	3,038
10	0,9724			8	0,9727	0,029
11	0,9836	2	0,9823			0,133
12	0,9938	3	1,0027			0,886
13	1,0619	4	1,0678			0,553
14	1,0736	6	1,0826			0,831
15	1,0778			10	1,1101	2,910
16	1,0854	7	1,1041			1,694
17	1,0903	5	1,0737			1,523
18	1,1173	8	1,1126			0,421
19	1,1193	9	1,1153			0,357
20	1,1677	10	1,1667			0,086
21	1,1686	11	1,1677			0,077
22	1,2064	12	1,1969			0,787
23	1,2283	13	1,2407			0,999
24	1,2338	14	1,2422			0,676
25	1,2368	15	1,2425			0,459
26	1,2383	16	1,2450			0,538
27	1,2445			11	1,2860	3,227
28	1,2684			12	1,3203	3,931
29	1,2943	18	1,3081			1,055
30	1,3012	17	1,2978			0,261
...
920	5,7074			540	5,7129	0,096
921	5,7174			541	5,7254	0,140
922	5,7199	287	5,7239			0,070
923	5,7223	288	5,7281			0,101
...
1018	5,9873			617	5,9870	0,005
1019	5,9886			617	5,9871	0,025
1020	5,9891			618	5,9879	0,020
1021	5,9895			619	5,9929	0,057
...

В таблице 4.8 приведены вычисленные частоты собственных колебаний полной системы (модель 1.1) и составляющих её подсистем с использованием суперэлементов (модели 1.4 и 1.5). В таблице 4.9 выборочно показаны соответствующие собственные формы колебаний. Δ_1 и Δ_2 в таблицах 4.8 и 4.9 – разницы частот собственных колебаний полной системы и подсистем с применением суперэлементного подхода. Приведены результаты расчета подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» с учетом суперэлемента «металлические конструкции покрытия» (модель 1.4) выполненного с помощью метода фиксированной границы с удержанием внутренних форм колебаний в интервале вдвое большем, чем исследуемый диапазон. Для подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом суперэлемента «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» (модель 1.5) приведены результаты расчета выполненного с помощью метода свободной границы с удержанием внутренних форм колебаний в интервале вдвое большем, чем исследуемый диапазон.

Количество внутренних форм колебаний подконструкции в различных интервалах и при разных методах их учета приведено в таблице 4.7).

Таблица 4.7. Количество внутренних частот и форм собственных колебаний подконструкций в различных частотных диапазонах. Нижний Новгород.

		Подконструкция «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун»				Подконструкция «металлические конструкции покрытия»			
		Метод фиксированной границы		Метод свободной границы		Метод фиксированной границы		Метод свободной границы	
№ п/п	Частотный диапазон, Гц	Кол-во частот и форм	Макс. частота, Гц	Кол-во частот и форм	Макс. частота, Гц	Кол-во частот и форм	Макс. частота, Гц	Кол-во частот и форм	Макс. частота, Гц
1	до 3 Гц	60	2,9769	133	2,9728	134	2,7452	610	2,9933
2	до 6 Гц	300	5,9639	430	5,9785	600	5,9999	1086	5,9891
3	до 9/12 Гц*	727	8,9962	859	8,9982	2771	11,9960	3121	11,9830

*Для подконструкции «основание – железобетонные конструкции» собственные частоты и формы колебаний вычислены в диапазоне до 9Гц.

4.3.2. Анализ результатов динамических расчетов полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» и составляющих её подсистем

В результате сравнительного анализа собственных частот и форм колебаний полной системы и подсистем без применения суперэлементов стадиона в Нижнем Новгороде выявлено слабое влияние податливости опорной подсистемы на статическое состояние и динамику подсистемы конструкций покрытия, что позволяет обосновать исследование последней в рамках отдельной модели. В свою очередь, подсистема конструкций покрытия не оказывает существенного влияния на поведение опорной подсистемы, что также дает основание выполнять исследования изолированной подсистемы. Разница вычисленных частот колебания полной системы и подсистем не превышает 7 %.

В сводной таблице 4.10 приведены величины максимальных расхождений динамических характеристик полной системы и подсистем с суперэлементами в различных частотных диапазонах, с учетом различного количества внутренних форм колебаний подконструкций.

Сопоставительный анализ подтвердил выводы, сделанные на базе верификационного примера ТЦ «Волгамолл». При учете внутренних форм подконструкции в том же частотном диапазоне, что и для полной системы, максимальное расхождение с эталонным решением (полученным с использованием полной КЭ-модели) составляет не более 6,307 %, однако в верхнем частотном диапазоне возникают «пропуски» отдельных форм колебаний. При увеличении частного диапазона учтенных внутренних форм колебаний подконструкции в 1,5-2 раза, «пропуски» не обнаруживаются, а максимальное расхождение с полной системой составляет не более 3,468 % для отдельных форм, а в основном не превышает 0,050 %.

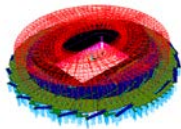
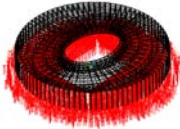
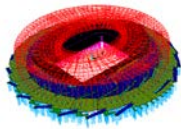
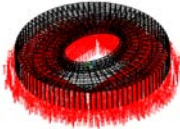
Точность метода *фиксированной границы* выше, чем *свободной границы*, для случая подсистемы «основание – железобетонные конструкции», моделируемой в явном КЭ-виде, а «металлические конструкции» – как суперэлемента. При этом максимальные расхождения с полной системой

составили 0,593 % и 0,052 % в зависимости от рассмотренного частотного диапазона, при достаточном количестве учтенных внутренних форм.

Метод *свободной границы* оказался более точен, когда подсистема «металлические конструкции» моделируется в явном КЭ-виде, а «основание – железобетонные конструкции» – как суперэлемент. Максимальные расхождения с полной системой составили 0,015 и 0,030 % в зависимости от рассмотренного частотного диапазона, при достаточном количестве учтенных внутренних форм.

Таким образом исследовать динамические характеристики несущих конструкций стадиона в Нижнем Новгороде можно как в рамках отдельных моделей, так и с применением суперэлементного подхода.

Таблица 4.10. Величины максимальных расхождений между частотами собственных колебаний полной системы и подсистем с суперэлементами. Нижний Новгород.

№ п/п	Исследуемый частотный диапазон	Метод фиксированной границы							
		 Модель 1.4				 Модель 1.5			
		Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %
1	до 3 Гц	до 3 Гц	6,307 пропуск	до 6 Гц	0,593	до 3 Гц	3,831 пропуск	до 6 Гц	0,860
2	до 6 Гц	до 6 Гц	1,007 пропуск	до 12 Гц	0,052	до 6 Гц	1,731 пропуск	до 9 Гц	1,139 пропуск
№ п/п	Исследуемый частотный диапазон	Метод свободной границы							
		 Модель 1.4				 Модель 1.5			
		Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ , %
1	до 3 Гц	до 3 Гц	4,529 пропуск	до 6 Гц	3,468	до 3 Гц	0,394	до 6 Гц	0,015
2	до 6 Гц	до 6 Гц	3,468 пропуск	до 12 Гц	3,060	до 6 Гц	0,141	до 9 Гц	0,030

4.4. Результаты расчетов стадиона в Ростове-на-Дону

4.4.1. Результаты динамического расчета полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» и составляющих её подсистем

В данном параграфе представлены основные результаты динамического расчета полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» и составляющих её подсистем стадиона в Ростове-на-Дону. Собственные частоты и формы колебаний вычислены с учетом массы только от собственного веса несущих конструкций.

В таблице 4.11 приведены вычисленные частоты собственных колебаний полной системы (модель 2.1) и подсистем без использования суперэлементов (2.2, 2.3 и 2.4). В таблице 4.12 выборочно показаны соответствующие собственные частоты и формы колебаний. Δ в указанных таблицах – максимальная разница, выраженная в процентном отношении, частот собственных колебаний полной системы и подсистем. Зеленым фоном в таблицах отмечены частоты собственных колебаний полной системы и подсистем, на которых формы колебаний совпадают. Оранжевым фоном выделены те собственные частоты колебания полной системы, которым не соответствуют формы колебания подсистем или отсутствуют вовсе. Красным отмечены те собственные частоты колебаний подсистем, на которых формы колебаний не соответствуют формам полной системы, либо отсутствуют.

В приведенных ниже таблицах данные расположены таким образом, что в одной строке приведены частоты, близкие по величине, а также имеют сходные или совпадающие форм собственных колебаний.

В таблице 4.14 приведены вычисленные частоты собственных колебаний полной системы (модель 2.1) и подсистем с использованием суперэлементов (модели 2.5 и 2.6). В таблице 4.15 показаны некоторые собственные формы колебаний упомянутых систем. Δ_1 и Δ_2 в таблицах 4.14 и 4.15 – разницы частот собственных колебаний полной системы и подсистем с применением суперэлементного подхода. Приведены результаты расчета подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» с учетом суперэлемента «металлические конструкции покрытия» (модель 2.5) выполненного с помощью метода фиксированной границы с удержанием внутренних форм колебаний в интервале вдвое большем, чем исследуемый диапазон. Для подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом суперэлемента «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» (модель 2.6) приведены результаты расчета выполненного с помощью метода свободной границы с удержанием внутренних форм колебаний в интервале вдвое большем, чем исследуемый диапазон.

Количество внутренних форм колебаний подконструкции в различных интервалах и при разных методах их учета приведено в таблице 4.13).

Таблица 4.13. Количество внутренних частот и форм собственных колебаний подконструкций в различных частотных диапазонах. Ростов-на-Дону.

		Подконструкция «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун»				Подконструкция «металлические конструкции покрытия»			
		Метод фиксированной границы		Метод свободной границы		Метод фиксированной границы		Метод свободной границы	
№ п/п	Частотный диапазон, Гц	Кол-во частот и форм	Макс. частота, Гц	Кол-во частот и форм	Макс. частота, Гц	Кол-во частот и форм	Макс. частота, Гц	Кол-во частот и форм	Макс. частота, Гц
1	до 3 Гц	31	2,999	40	2,999	24/32	2,7491/ 2,9723	75/106	2,9111/ 2,9586
2	до 6 Гц	109	5,973	123	5,999	107/121	5,9855/ 5,9480	151/197	5,9761/ 5,9234
3	до 12 Гц	966	11,999	1033	11,997	336/318	11,973/ 11,982	398/421	11,995/ 11,953

4.4.2. Анализ результатов динамических расчетов полной системы и составляющих её подсистем

В результате сравнительного анализа собственных частот и форм колебаний полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» и подсистем без использования суперэлементов стадиона в Ростове-на-Дону выявлено существенное влияние податливости опорной подсистемы на динамические характеристик упомянутой подсистемы конструкций покрытия. В свою очередь, подсистема конструкций покрытия также оказывает значимое влияние на поведение опорной подсистемы. Этот факт свидетельствует о невозможности проведения независимых расчетов подсистем, без учета жесткостных, инерционных и массовых характеристик всех элементов полной системы. Большинство форм собственных колебаний полной системы являются связными и не проявляются при колебаниях отдельных подсистем. Разница вычисленных частот колебания полной системы и подсистем для схожих форм составила до 8,5 %.

В сводной таблице 4,16 приведены величины максимальных расхождений динамических характеристик полной системы и подсистем с суперэлементами в различных частотных диапазонах, с учетом различного количества внутренних форм колебаний подконструкций.

При учете внутренних форм подконструкции в том же частотном диапазоне, что и для полной системы, максимальное расхождение с эталонным решением (полученным с использованием полной КЭ-модели) составляет не более 3,310 %, однако в верхнем частотном диапазоне возникают «пропуски» отдельных форм колебаний. При увеличении частного диапазона учтенных внутренних форм колебаний подконструкции в 1,5-2 раза, «пропуски» не обнаруживаются, а максимальное расхождение с полной системой составляет не более 0,793 % для отдельных форм, а в основном не превышает 0,050 %.





Точность метода *фиксированной границы* выше, чем *свободной границы*, для случая подсистемы «основание – железобетонные конструкции»,

моделируемой в явном КЭ-виде, а «металлические конструкции» – как суперэлемента. При этом максимальные расхождения с полной системой составили 0,052 % и 0,035 % в зависимости от количества удержанных внутренних форм.

Метод *свободной границы* оказался более точен, когда подсистема «металлические конструкции» моделируется в явном КЭ-виде, а «основание – железобетонные конструкции» – как суперэлемент. Максимальные расхождения с полной системой составили 0,760 % и 0,053 % в зависимости от количества удержанных внутренних форм.

Таким образом исследовать динамические характеристики несущих конструкций стадиона в Ростове-на-Дону можно в рамках отдельных моделей с применением суперэлементного подхода.

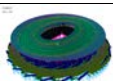
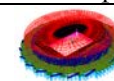
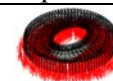
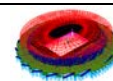
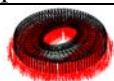
Таблица 4.16. Величины максимальных расхождений между собственными частотами колебаний полной системы и подсистем с суперэлементами. Ростов-на-Дону.

№ п/п	Исследуемый частотный диапазон	Метод фиксированной границы							
		 Модель 2.5				 Модель 2.6			
		Диапазон учтенных внутренних форм	Δ, %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ, %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ, %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ, %
1	до 3 Гц	до 3 Гц	0,924 пропуск	до 6 Гц	0,052	до 3 Гц	1,867 пропуск	до 6 Гц	0,770
2	до 6 Гц	до 6 Гц	0,995 пропуск	до 12 Гц	0,035	до 6 Гц	3,310 пропуск	до 12 Гц	0,793
№ п/п	Исследуемый частотный диапазон	Метод свободной границы							
		 Модель 2.5				 Модель 2.6			
		Диапазон учтенных внутренних форм	Δ, %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ, %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ, %	Диапазон учтенных внутренних форм	Δ, %
1	до 3 Гц	до 3 Гц	0,768 пропуск	до 6 Гц	0,097	до 3 Гц	0,593	до 6 Гц	0,053
2	до 6 Гц	до 6 Гц	0,515 пропуск	до 12 Гц	0,342	до 6 Гц	0,764	до 12 Гц	0,760

4.5. Анализ вычислительной эффективности разработанной методики

В данной разделе приведены оценки вычислительной эффективности разработанной методики, с точки зрения временных затрат на проведение расчетов динамических характеристик исследуемых комбинированных систем. В таблицах 4.17 и 4.19 представлены сопоставления времени вычисления динамических характеристик полной системы и подсистем с суперэлементами в нескольких частотных диапазонах для стадионов в Нижнем Новгороде и Ростове-на-Дону соответственно. В таблицах 4.18 и 4.20 приведены временные затраты на вычисления внутренних форм колебаний подконструкций при использовании 2-х методов: фиксированной и свободной границы в различных частотных диапазонах, для стадионов в Нижнем Новгороде и Ростове-на-Дону соответственно.

Таблица 4.17. Сопоставление «машинного» времени вычисления динамических характеристик полной системы и подсистем с суперэлементами стадиона в Нижнем Новгороде.

№ п/п	Частотный диапазон (Количество собственных частот и форм)	Время счета		Время счета (Количество собственных частот и форм)				
		Полная система		Диапазон частот, удержанных в суперэлементе	Подсистема с суперэлементом Метод фиксированной границы		Подсистема с суперэлементом Метод свободной границы	
		 Модель 1.1			 Модель 1.4	 Модель 1.5	 Модель 1.4	 Модель 1.5
1	до 3 Гц (291)	00:38:43	до 3 Гц до 6 Гц	00:40:44 (285) 00:54:54 (291)	00:00:27 (288) 00:01:32 (291)	00:40:32 (287) 00:57:23 (291)	00:00:30 (290) 00:00:31 (291)	
2	до 6 Гц (1021)	01:36:25	до 6 Гц до 9/12 Гц*	01:31:06 (997) 01:53:17 (1021)	00:01:58 (1017) 00:02:24 (1018)	01:50:17 (1014) 01:49:34 (1021)	00:01:50 (1021) 00:02:31 (1021)	

*При исследовании определении собственных частот и форм колебаний модели 1.4 в диапазоне до 6Гц для подконструкции учитывались внутренние частоты в диапазоне до 9Гц.

Время счета приведено в формате: «чч:мм:сс».

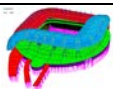
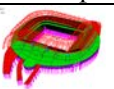
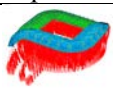
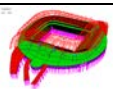
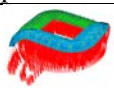
Таблица 4.18. «Машинное» время вычисления внутренних форм колебаний подконструкций стадиона в Нижнем Новгороде.

№ п/п	Частотный диапазон	Метод фиксированной границы				Метод свободной границы			
		Подконструкция «основание – железобетонные конструкции»		Подконструкция «металлические конструкции покрытия»		Подконструкция «основание – железобетонные конструкции»		Подконструкция «металлические конструкции покрытия»	
		Количество частот и форм колебаний	Время счета	Количество частот и форм колебаний	Время счета	Количество частот и форм колебаний	Время счета	Количество частот и форм колебаний	Время счета
1	до 3 Гц	60	00:22:00	134	00:00:13	133	00:29:53	610	00:03:20
2	до 6 Гц	300	00:56:36	603	00:01:27	430	01:32:52	1086	00:06:57
3	до 9/12 Гц*	727	02:14:04	2771	00:04:07	859	04:41:51	3121	00:25:23

*Для подконструкции «основание – железобетонные конструкции» собственные частоты и формы колебаний вычислены в диапазоне до 9Гц.

Время счета приведено в формате: «чч:мм:сс».

Таблица 4.19. Сопоставление «машинного» времени вычисления динамических характеристик полной системы и подсистем с суперэлементами стадиона в Ростове-на-Дону.

№ п/п	Частотный диапазон (Количество собственных частот и форм колебаний)	Время счета		Время счета (Количество собственных частот и форм колебаний)			
		Полная система  Модель 2.1	Диапазон частот, удержанных в суперэлементе	Подсистема с суперэлементом Метод фиксированной границы		Подсистема с суперэлементом Метод свободной границы	
				 Модель 2.5	 Модель 2.6	 Модель 2.5	 Модель 2.6
1	до 3 Гц (92)	00:22:07	до 3 Гц	00:11:08 (91)	00:00:23 (86)	00:13:37 (91)	00:00:25 (92)
			до 6 Гц	00:13:12 (92)	00:00:43 (92)	00:13:52 (92)	00:01:37 (92)
2	до 6 Гц (350)	00:55:04	до 6 Гц	00:50:19 (345)	00:02:04 (341)	00:51:28 (347)	00:01:51 (350)
			до 12 Гц	01:07:47 (350)	00:02:11 (350)	01:04:18 (350)	00:01:58 (350)

Время счета приведено в формате: «чч:мм:сс».

Таблица 4.20. «Машинное» время вычисления внутренних форм колебаний подконструкций стадиона в Ростове-на-Дону.

№ п/п	Частотный диапазон	Метод фиксированной границы				Метод свободной границы			
		Подконструкция «основание – железобетонные конструкции»		Подконструкция «металлические конструкции покрытия» СВ крыло/ ЮЗ крыло		Подконструкция «основание – железобетонные конструкции»		Подконструкция «металлические конструкции покрытия» СВ крыло/ ЮЗ крыло	
		Количество частот и форм колебаний	Время счета	Количество частот и форм колебаний	Время счета	Количество частот и форм колебаний	Время счета	Количество частот и форм колебаний	Время счета
1	до 3 Гц	31	00:07:54	23/32	00:00:10/ 00:00:15	40	00:07:38	106/75	00:00:10/ 00:00:21
2	до 6 Гц	109	00:12:07	106/121	00:00:20/ 00:00:15	123	00:16:58	197/151	00:00:23/ 00:00:23
3	до 12 Гц	966	00:34:47	336/318	00:00:23/ 00:00:37	1033	00:49:37	398/421	00:00:58/ 00:01:02

Время счета приведено в формате: «чч:мм:сс».

На гистограммах на рисунках 4.14 – 4.17 приведено сравнение «машинного» времени вычисления динамических характеристик полной модели и моделей с суперэлементами. Время счета приведено в формате «ч:мм:сс». Для моделей с суперэлементами данные приведены как учетом, так и без учета времени, затраченного на вычисление внутренних частот/форм подконструкций. По вертикали на гистограммах отмечено время, по горизонтали частотные диапазоны, в которых производилось вычисление динамических характеристик. Красным фоном отмечены временные затраты при расчете полной КЭ-модели системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия». Фиолетовым – для КЭ-модели подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» с учетом суперэлемента «металлические конструкции покрытия», при этом внутренние формы колебаний суперэлемента вычислены в том же частотном диапазоне, что и исследуемый для всей модели. Желтым – для КЭ-модели подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» с учетом суперэлемента «металлические конструкции покрытия», при этом внутренние формы колебаний суперэлемента вычислены во вдвое большем частотном диапазоне, чем исследуемый для всей модели. Зеленым фоном отмечены временные затраты при расчете КЭ-модели подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом суперэлемента «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун», при этом внутренние формы колебаний суперэлемента вычислены в том же частотном диапазоне, что и исследуемый для всей модели. Синим – для КЭ-модели подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом суперэлемента «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун», при этом внутренние формы колебаний суперэлемента вычислены во вдвое большем частотном диапазоне, чем исследуемый для всей модели.

Метод фиксированной границы		Метод свободной границы	
Время счета в формате ч.:мм.:сс		Время счета в формате ч.:мм.:сс	
	Частотные диапазоны, Гц		Частотные диапазоны, Гц
Время счета в формате ч.:мм.:сс		Время счета в формате ч.:мм.:сс	
	Частотные диапазоны, Гц		Частотные диапазоны, Гц
	Полная КЭ-модель системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия».		
	КЭ-модель подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» + СЭ «металлические конструкции покрытия». <i>Внутренние формы СЭ в том же частотном диапазоне, что и исследуемый для всей модели.</i>		
	КЭ-модель подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» + СЭ «металлические конструкции покрытия». <i>Внутренние формы СЭ во вдвое большем частотном диапазоне, чем исследуемый для всей модели.</i>		
	КЭ-модель подсистемы «металлические конструкции покрытия» + СЭ «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун». <i>Внутренние формы СЭ в том же частотном диапазоне, что и исследуемый для всей модели.</i>		
	КЭ-модель подсистемы «металлические конструкции покрытия» + СЭ «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун». <i>Внутренние формы СЭ во вдвое большем частотном диапазоне, чем исследуемый для всей модели.</i>		

Рисунок 4.14. Сопоставление «машинного» времени вычисления динамических характеристик полной системы и подсистем с суперэлементами стадиона в Нижнем Новгороде *без учета* времени, затраченного на формирование СЭ

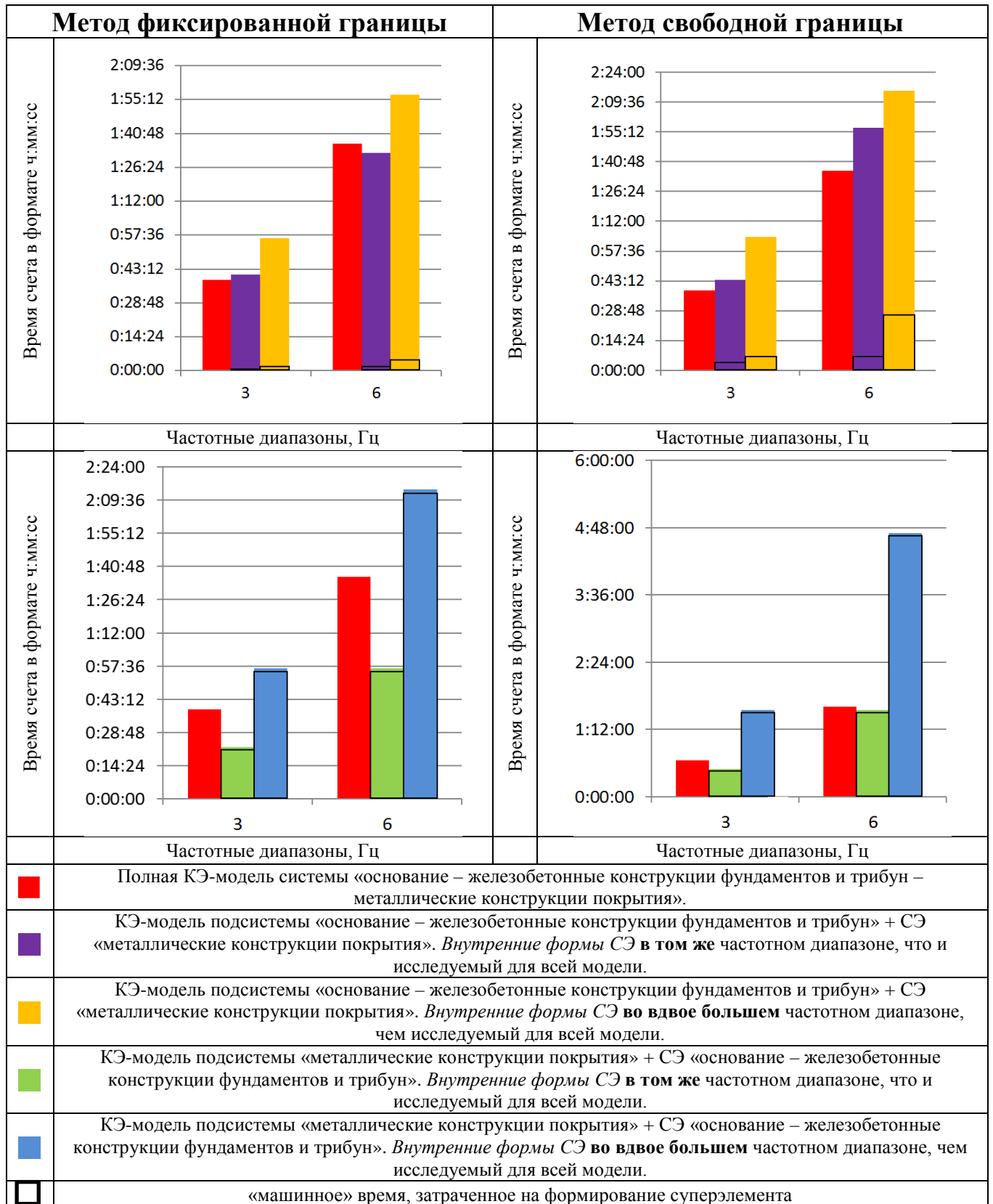


Рисунок 4.15. Сопоставление «машинного» времени вычисления динамических характеристик полной системы и подсистемы с суперэлементами стадиона в Нижнем Новгороде *с учетом* времени, затраченного на формирование СЭ

Метод фиксированной границы		Метод свободной границы	
Время счета в формате ч.:мм.:сс		Время счета в формате ч.:мм.:сс	
	Частотные диапазоны, Гц		Частотные диапазоны, Гц
Время счета в формате ч.:мм.:сс		Время счета в формате ч.:мм.:сс	
	Частотные диапазоны, Гц		Частотные диапазоны, Гц
	Полная КЭ-модель системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия».		
	КЭ-модель подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» + СЭ «металлические конструкции покрытия». <i>Внутренние формы СЭ в том же частотном диапазоне, что и исследуемый для всей модели.</i>		
	КЭ-модель подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» + СЭ «металлические конструкции покрытия». <i>Внутренние формы СЭ во вдвое большем частотном диапазоне, чем исследуемый для всей модели.</i>		
	КЭ-модель подсистемы «металлические конструкции покрытия» + СЭ «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун». <i>Внутренние формы СЭ в том же частотном диапазоне, что и исследуемый для всей модели.</i>		
	КЭ-модель подсистемы «металлические конструкции покрытия» + СЭ «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун». <i>Внутренние формы СЭ во вдвое большем частотном диапазоне, чем исследуемый для всей модели.</i>		

Рисунок 4.16. Сопоставление «машинного» времени вычисления динамических характеристик полной системы и подсистем с суперэлементами стадиона в Ростове-на-Дону *без учета* времени, затраченного на формирование СЭ

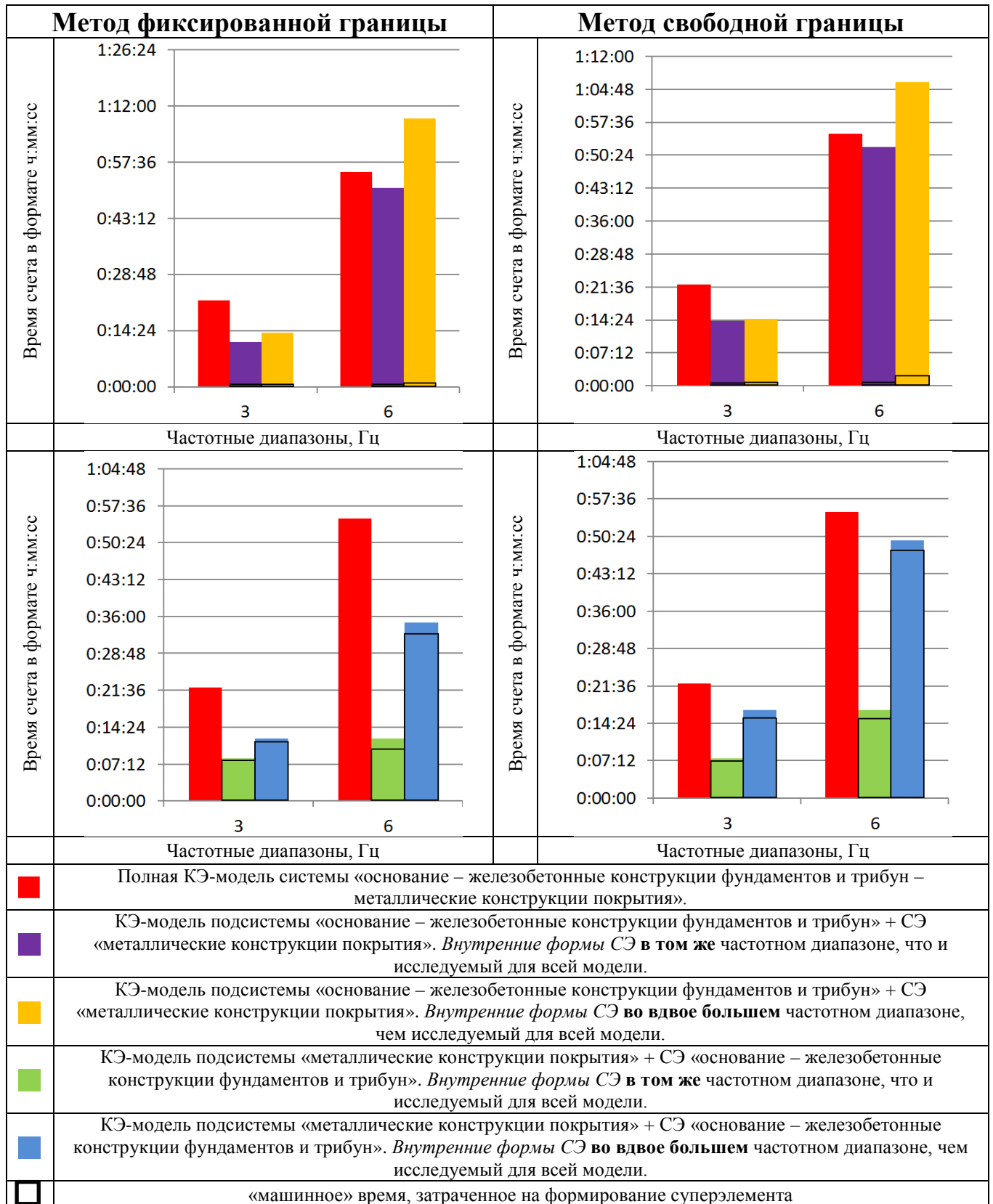


Рисунок 4.17. Сопоставление «машинного» времени вычисления динамических характеристик полной системы и подсистем с суперэлементами стадиона в Ростове-на-Дону с *учетом* времени, затраченного на формирование СЭ

Суммарное «машинное» время на формирование суперэлемента и расчет динамических характеристик подсистемы с его применением, при учете достаточного количества внутренних форм колебаний подконструкции, сопоставимо со временем, затраченным на расчет полной системы. Однако время при расчете подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом суперэлемента подсистемы «основание – железобетонные конструкции» (не принимая в расчет затраченное «машинное» время на формирование суперэлемента) в 15-30 раз (для Ростова-на-Дону) и в 40-75 раз (для Нижнего Новгорода) меньше, чем затрачиваемое на расчет полной системы. Объяснение такого результата кроется в значительном различии вычислительных размерностей подсистем. Подсистема «металлические конструкции покрытия» имеет относительно малую размерность (5 - 10 % от полной системы) и, соответственно, требует незначительных вычислительных затрат. Подсистема «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» напротив, имеет вычислительную размерность, составляющую 90 % и более от полной системы. Такой существенный выигрыш с точки зрения вычислительной эффективности приобретает первостепенное значение при проведении многовариантных расчетных исследований подсистемы «металлические конструкции покрытия» с целью её оптимизации, так как в данном случае повторно формировать суперэлемент не требуется.

Таким образом, продемонстрирована вычислительная эффективность разработанной методики суперэлементного моделирования динамических характеристик комбинированных большеразмерных систем, как представленные в настоящей главе футбольные стадионы.

4.6. Выводы по главе 4

В результате выполненных разработок и расчетных исследований динамических характеристик систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» футбольных стадионов в городах Нижний Новгород и Ростов-на-Дону можно сформулировать нижеследующие выводы:

1. Сравнительный анализ собственных частот и форм колебаний полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» и подсистем стадиона в Нижнем Новгороде выявил слабое влияние податливости опорной подсистемы на динамические характеристики подсистемы конструкций покрытия, что позволяет обосновать исследование последней в рамках отдельной модели. В свою очередь, подсистема «металлические конструкции покрытия» не оказывает существенного влияния на поведение опорной подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун», что также дает основание выполнять исследования изолированной подсистемы.

2. Напротив, сравнение собственных частот и форм колебаний полной системы и подсистем стадиона в Ростове-на-Дону показало значительное взаимное влияние опорной подсистемы и подсистемы конструкций покрытия на динамические характеристики. Это свидетельствует о невозможности проведения независимых расчетов подсистем, без учета жесткостных и массовых характеристик всех элементов полной системы.

3. Сопоставление собственных частот и форм колебаний полных систем и подсистем с учетом суперэлементов показывает, что расчеты динамических характеристик с применением метода динамического синтеза подконструкций дают результаты, близкие полученным при расчете полной системы. Расхождения величин вычисленных собственных частот колебания для большинства форм не превышает 0,050 %, а для отдельных форм колебаний, в исследуемом диапазоне, составляет до 0,900 % в зависимости от рассмотренного частотного диапазона, при достаточном количестве учтенных внутренних форм колебаний подконструкции.

4. Сравнение результатов расчетов динамических характеристик, вычисленных различными вариантами метода динамического синтеза подконструкций, позволяет сформулировать следующие рекомендации: для формирования суперэлемента подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» предпочтительнее применять метод свободой границы, для суперэлемента подсистемы «металлические конструкции» – метод фиксированной границы. Именно при таком подходе достигается минимальное расхождение значений собственных частот и форм колебаний полной системы и подсистем с применением суперэлементов.

5. Продемонстрирована «организационная» эффективность разработанной методики для двух реальных комбинированных большеразмерных системах «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» с применением суперэлементных подходов.

6. Подтверждена вычислительная эффективность разработанных моделей с суперэлементами. Суммарное «машинное» время на формирование суперэлемента и расчет динамических характеристик подсистемы с его применением, при учете достаточного количества внутренних форм колебаний подконструкции, сопоставимо со временем, затраченным на КЭ-расчет полной системы. Время при расчете подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом суперэлемента «основание – железобетонные конструкции» (не принимая в расчет затраченное «машинное» время на формирование суперэлемента) в 15-30 раз (для Ростова-на-Дону) и в 40-75 раз (для Нижнего Новгорода) меньше, чем затрачиваемое на расчет полной системы. Это дает существенный выигрыш в вычислительной эффективности при проведении многовариантных расчетных исследований подсистемы «металлические конструкции покрытия» с целью её оптимизации, так как повторно формировать суперэлемент не требуется.

7. Полученные результаты позволяют рекомендовать разработанную методику к применению для широкого класса комбинированных большеразмерных систем «основание – железобетонные конструкции – металлические конструкции покрытия».

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

1. По результатам аналитического обзора современных математических моделей, численных методов и программных комплексов, применяемых для статических и динамических расчетов комбинированных большеразмерных систем уникальных сооружений, выполнена конкретизация задач диссертационного исследования.

2. Разработана и программно реализована эффективная суперэлементная методика математического моделирования динамических характеристик большеразмерных систем «основание – железобетонные конструкции – металлоконструкции покрытия», позволяющая перейти к исследованию подсистем «основание», «железобетонные конструкции» и «металлические конструкции покрытия» в рамках отдельных моделей.

3. Верификационные примеры (включая входной блок ТЦ «Волгамолл» в г. Волжский) продемонстрировали эффективность и особенности использования разработанной суперэлементной методики для исследования динамических характеристик комбинированных систем схожего типа.

4. С использованием разработанной методики впервые решены в такой востребованной практикой постановке задачи высокого уровня ответственности, сложности и размерности – проведены расчетные исследования динамических характеристик комбинированных систем футбольных стадионов большой вместительности (от 35 000 до 68 000 зрителей) в Санкт-Петербурге, Самаре, Волгограде, Нижнем Новгороде, Ростове-на-Дону, Екатеринбурге.

5. В результате сравнительного анализа собственных частот и форм колебаний полной системы и подсистем стадиона в Нижнем Новгороде выявлено слабое влияние податливости опорной подсистемы на динамические характеристики конструкций покрытия, что позволяет обосновать исследование последних в рамках отдельной модели. В свою очередь, подсистема конструкций покрытия не оказывает существенного влияния на поведение опорной подсистемы, что также дает основание выполнять ее исследования изолированно.

6. Напротив, сравнение собственных частот и форм колебаний полной

системы и подсистем конструкций стадиона в Ростове-на-Дону показало значительное взаимное влияние подсистем на динамические характеристики. Это свидетельствует о невозможности проведения расчетов подсистем по отдельным моделям без использования суперэлементов.

7. Анализ собственных частот и форм колебаний полных систем и подсистем с суперэлементами стадионов в гг. Нижний Новгород и Ростов-на-Дону показывает, что динамические характеристики практически идентичны при учете достаточного числа внутренних собственных частот и форм колебаний подконструкций.

8. Продемонстрирована наиболее ценная, «организационная» эффективность разработанной Методики для двух реальных комбинированных большеразмерных систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» с применением суперэлементных подходов. Подтверждена вычислительная конкурентоспособность разработанных моделей с суперэлементами (по сравнению с полными КЭ-моделями).

9. Представленные результаты диссертационного исследования позволяют рекомендовать разработанную суперэлементную методику к применению для широкого класса расчетных исследований комбинированных большеразмерных систем уникальных зданий и сооружений.

10. Перспективой дальнейшей разработки данной темы представляется развитие и применение предложенной суперэлементной методики математического моделирования комбинированных большеразмерных систем для решения задач в физически, геометрически, структурно и генетически нелинейных постановках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айронс Б. Задачи о собственных значениях матриц конструкции, исключение лишних переменных // Ракетная техника и космонавтика. –1965. – Т. 3. – № 5. – С. 207- 209.
2. Айронс Б. Роль частичного обращения в задачах со смешанными переменными о поведении системы жидкость-конструкция // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – Т. 8. – № 3. – С. 239-241.
3. Аксельрад Э.Л. Гибкие оболочки. – М.: Наука. – 1976. – 376 с.
4. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука. – 1966. – 544 с.
5. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука. – 1965. – 559 с.
6. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат. – 1982. – 446 с.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Наука. – 1975. – 63 с.
8. Белостоцкий А.М. Численное моделирование статического и динамического напряженно-деформированного состояния пространственных систем «сооружение – основание – водохранилище» с учетом нелинейных эффектов открытия-закрытия швов и макротрещин // диссертация док. техн. наук. – Москва. – 1998. – 367 с.
9. Белостоцкий А.М., Дубинский С.И. Анализ причин обрушения конструкций покрытия СОК «Трансвааль-парк» // ANSYS Solution. Русская редакция. Зима. – 2007. – С. 5-12.
10. Белостоцкий А.М., Аул А.А., Нагибович А.И., Дмитриев Д.С. Особенности расчетов напряженно-деформированного состояния, динамики, прочности и устойчивости конструкций футбольных стадионов к Чемпионату мира 2018 года // Актуальные проблемы численного моделирования зданий, сооружений и комплексов. – М.: АСВ. – 2016.–Т.2.– С. 358-375.
11. Белостоцкий А.М., Аул А.А., Дмитриев Д.С., Дядченко Ю.Н., Нагибович А.И., Островский К.И., Павлов А.С. Обоснование механической

безопасности стадионов к Чемпионату мира по футболу 2018 года в России. Часть 1: Особенности разработки расчетных моделей и результаты исследований при основных сочетаниях нагрузок. // Научные труды РААСН. – 2018.– Т. 2. – С. 95-102.

12. Белостоцкий А.М., Аул А.А., Дмитриев Д.С., Дядченко Ю.Н., Нагибович А.И., Островский К.И., Павлов А.С. Обоснование механической безопасности стадионов к Чемпионату мира по футболу 2018 года в России. Часть 2: Особенности и результаты расчетных исследований при особых сочетаниях нагрузок. Научное сопровождение при прохождении экспертизы. // Научные труды РААСН. – 2018.– Т. 2. – С. 103-109.

13. Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Аул А.А., Дмитриев Д.С., Дядченко Ю.Н., Нагибович А.И., Островский К.И., Павлов А.С. Расчетное обоснование механической безопасности стадионов к Чемпионату мира по футболу 2018 года // Academia. Архитектура и строительство.– 2018. – № 3.– С. 118-129.

14. Белостоцкий А.М., Белый М.В., Рассказов Л.Н., Желанкин В.Г. Разработка калиброванных математических моделей напряженно-деформированного состояния гидротехнических сооружений (на примере склона Загорской ГАЭС) // Сборник научных трудов АО НИИЭС “Безопасность энергетических сооружений”. – 2000. – №7. – С. 153-156.

15. Белостоцкий А.М., Белый М.В. Суперэлементные алгоритмы решения пространственных нелинейных статических и динамических задач большой размерности. Реализация в программном комплексе СТАДИО и опыт расчетных исследований // Труды XVIII Международной конференции “Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов”. ВЕМ&FEM-2000, Санкт-Петербург. – 2000. – С.65-69.

16. Белостоцкий А.М., Белый М.В., Рассказов Л.Н., Желанкин В.Г. Численное моделирование пространственного напряженно-деформированного состояния систем “сооружение-основание” с учетом нелинейных реологических свойств грунтов // Сборник научных трудов МГСУ “Вопросы прикладной математики и вычислительной механики”. Москва. – 2001. – С. 22-29.

17. Белостоцкий А.М., Нагибович А.И. Обоснование механической безопасности стадионов к Чемпионату мира по футболу 2018 года в России. Постановка задач расчетных исследований // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. Vol. 14. – №1. – С. 26-42.
18. Белостоцкий А.М., Сутурин И.М. Суперэлементное моделирование статического и динамического НДС многоэтажных панельных зданий. // Сборник научных трудов МГСУ "Вопросы прикладной математики и вычислительной механики". Москва. – 2002. – С. 57-69.
19. Белостоцкий А. М., Дубинский С. И., Потапенко А. Л. Методы динамического синтеза подконструкций в задачах моделирования сложных инженерных систем // Строительная механика и расчет сооружений. – 2006. – №6. – С. 45.
20. Белостоцкий А. М., Потапенко А. Л. Реализация и верификация методов субмоделирования и динамического синтеза подконструкций в универсальных и специализированных программных комплексах // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. –2011. – Vol. 7. – №1. pp. 76-84.
21. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы. – 1962. – 600 с.
22. Верификационный отчет по ПК ANSYS Mechanical (4 тома). – М.: ЗАО НИЦ «СтаДиО», ГОУ ВПО МГСУ. – 2009 г. Свидетельство РААСН о верификации ПС № 02/ANSYS/2009 от 10.07.2009 года.
23. Вольмир А. С., Терских В. Н. Исследование динамики конструкций из композитных материалов на основе метода суперэлементов // Механика композитных материалов. – 1979. – №4. – С. 652—655.
24. Вольмир А. С., Куранов Б. А., Турбаивский А. Т. Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований. М. : Машиностроение. – 1989. – 248 с.
25. Вольмир А.С., Михнев В.Ф., Терских В.Н, Тихомиров А.Б. Многоуровневые методы исследования сложных упругих систем // Проблемы

устойчивости и предельной несущей способности конструкций: Межвузовский тематический сб. тр. ЛИСИ. – Л.: ЛИСИ. – 1983. С. 25-34.

26. Гайан Р. Приведение матриц жесткости и массы // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – Т.3. – №2. – С. 277-278.

27. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир. – 1984. – 428 с.

28. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. – К.: Факт. – 2005. – 344 с.

29. Градостроительный кодекс Российской Федерации. Федеральный закон № 191-ФЗ. 2004 г. (в ред. 2018 г.)

30. Григорьев В.Г. Методология исследования динамических свойств сложных упругих и гидроупругих систем // Диссертация д-ра техн. наук. – Москва. – 2000. – 328 с.

31. Дмитриев С.Н. О частотном критерии в методе синтеза форм колебаний // Динамика систем и конструкций. Труды МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 1990. – № 545. – С. 51—69

32. Еремеев П.Г. Особенности проектирования уникальных большепролетных зданий и сооружений // Современное промышленное и гражданское строительство. – 2006. – № 1(2). – С. 5-15

33. Еремеев П.Г. Современные конструкции покрытий над трибунами стадионов. – М.: Издательство АСВ. – 2015. – 236 с.

34. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир. – 1975. – 541 с.

35. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. – М.: Мир. – 1986. – 318 с.

36. Ивантеев В. И., Чубань В. Д. Расчет частот и форм свободных колебаний конструкции методом многоуровневой динамической конденсации // Ученые записки ЦАГИ. – 1984. – Т. 15. – № 4. – С. 81—82.

37. Кабанцев О.В., Верификация расчетной технологии «Монтаж» программного комплекса «SCAD» // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2011. – Vol.7. – №3. – С.103-109.
38. Кабанцев О.В., Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Перельмутер А.В. Технология расчетного прогноза напряженно-деформируемого состояния конструкций с учетом истории возведения, нагружения и деформирования // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2011. – Vol.7. – №3. – С.110-117.
39. Канчели Н. В. Проект покрытия центрального стадиона в Москве // Пространственные конструкции зданий и сооружений. – 1996. – №8. – С. 203-212.
40. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат. – 1996. – 416 с.
41. Карпенко Н.И., Колчунов В.И. О концептуально методологических подходах к обеспечению конструктивной безопасности. Строительная механика и расчет сооружений. – М.: ФГУП НИЦ «Строительство» –2007. – №1. С. 21-23.
42. Карпенко С.Н. Методика расчета высотных зданий из монолитного железобетона на основе «послойной» пространственной конечно-элементной детализации // Тезисы докладов научной сессии «Новые конструктивные решения пространственных покрытий и перекрытий зданий и сооружений». Москва. – 2005. – С. 31-32.
43. Келасьев Н.Г., Черномаз А.П. Оптимизация конструктивных решений при проектировании футбольного стадиона на 45 000 зрителей в Ростове-на-Дону // Промышленное и гражданское строительство. – 2014. – № 7. – С. 48-50.
44. Куранов Б.А., Гусев С.С. Применение метода суперэлементов для расчета сложных машиностроительных конструкций. Расчеты на прочность // Машиностроение. – 1985. – №26. – С. 174-182.
45. Лебедев В.Л., Семенов В.А., Семенов П.Ю., Каличава Д.К. К определению динамических характеристик высотных зданий // Сборник статей «Пространственные конструкции зданий и сооружений (исследование, расчет, проектирование, применение)». Москва. – 2006. – №10. – 2006. – С. 41-44.

46. Лиходед А. И. О сходимости метода разложения по собственным формам колебаний в задачах динамического нагружения // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – №1. С. 180—188.

47. Макаров А. В. Применение и развитие метода частотно-динамической конденсации для решения задач о свободных колебаниях систем с большим числом степеней свободы // диссертация канд. техн. наук. – Волгоград. – 1993. – 149 с.

48. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука. – 1980. – 536 с.

49. Микулин В. Б., Фарфель М. И., Ханджи А. В. Покрытие Большой спортивной арены Олимпийского комплекса в Лужниках // ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. – 2007. – С. 46-55.

50. Мкртычев О.В. Надежность многоэлементных стержневых систем инженерных конструкций // диссертация док. техн. наук. – Москва. – 2000. – 324 с.

51. Мкртычев О.В. Безопасность зданий и сооружений при сейсмических и аварийных воздействиях. М.: МГСУ. – 2010. – 150с.

52. Нагибович А.И. Методика суперэлементного моделирования динамики систем «основание – конструкции фундаментов и трибун – конструкции покрытия» стадионов чемпионата мира по футболу 2018 года в России. Описание и верификация // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. Vol. 14. – №2.– С. 117-132.

53. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир. – 1976. – 464 с.

54. Перельмутер А.В. Прогрессирующее обрушение и методология проектирования конструкций // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2004. – № 6.

55. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа (Издание 3-е переработанное и дополненное). – М.: ДМК Пресс – 2007. – 595с.

56. Постнов В.А., Дмитриев С.А., Елтышев Б.К., Родионов А.А. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений. – Л.: Судостроение. – 1979. – 288 с.
57. Игнатъев В.А., Соколов О.Л., Альтенбах И., Киссинг В. Расчет тонкостенных пространственных конструкций пластинчатой и пластинчато-стержневой структуры. – М.: Стройиздат. – 1996. – 560 с.
58. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М.: Стройиздат. – 1977. – 129 с.
59. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат. – 1984. – 416 с.
60. Стренг Г., Фикс Дж., Теория метода конечных элементов. – М.: Мир. – 1977. – 349 с.
61. Травуш В.И., Александров А.В., Матвеев А.В. О расчёте стержневых конструкций на устойчивость // Промышленное и гражданское строительство. – 2002. – №3. С. 16-19.
62. Травуш В.И. Безопасность и устойчивость в приоритетных направлениях развития России // РААСН «ACADEMIA». – 2006. – №2. – С. 9-12.
63. Трифонов О.В., Чирков В.П. Анализ безопасности и форм разрушения конструкций при многокомпонентных динамических воздействиях / Строительная механика и расчет сооружений. М.: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. – 2008. – №6. С. 38-47.
64. Фиалко С.Ю. Прямые методы решения систем линейных уравнений в современных МКЭ-комплексах. М.: СКАД СОФТ, АСВ. – 2009. – 160 с.
65. Фиалко С.Ю. Сопоставление прямых и итерационных методов решения больших конечно-элементных задач строительной механики / Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. К.: Сталь. – 2002. – С. 552-569.
66. Фиалко С.Ю. Применение современных вычислительных технологий к расчету многоэтажных зданий. // Вестник одесской государственной академии строительства и архитектуры. – 2003. – № 9. – С. 189-193.

67. Чекмарев Д.Т., Жидков А.В. Численное решение трехмерных динамических задач теории упругости на основе ажурной схемы МКЭ. – Нижний Новгород.: Издательство Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. – 2010. – 53 с.
68. Чекмарев Д.Т. Вариационно-разностный метод решения нестационарных волновых задач динамики тонкостенных конструкций // Диссертация док. физ.-мат. наук. – Нижний Новгород. – 2003. – 263 с.
69. Шмаков В. П. Метод синтеза динамических характеристик упругих модульных конструкций // Вестник МГТУ. Машиностроение. – 1991. №1. – С. 4-0.
70. ANSYS 19. Structural Analysis Guide – SAS IP. – 2018.
71. ANSYS 19. Theory Reference for ANSYS and ANSYS Workbench – SAS IP. – 2018.
72. Aoyama Y., Yagawa G. Component mode synthesis for large-scale structural eigenanalysis // Computers & Structures, Volume 79, Issue 6, February 2001, Pages 605-615 Yuji
73. Bathe K.J., Dong J. Component mode synthesis with subspace iterations for controlled accuracy of frequency and mode shape solutions // Computers & Structures. – Vol. 139. – pp. 28-32.
74. Benfield W.A., Hruda R.F. Vibration analysis of structures by component mode substitution // AIAA Journal. – 1976. – Vol. 9. – pp. 1255-1261.
75. Biagini P., Borri C., Majowiecki M., Orlando M., Procino L. BLWT tests and design loads on the roof of the new Olympic stadium in Piraeus // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamic. – 2006. – № 94(5). – pp. 293-307.
76. Biondi B., Muscolino G. Component-mode synthesis method for coupled continuous and FE discretized substructures // Engineering Structures. – 2003. – Vol. 25. – №4. – pp. 419-433.
77. Borri C., Biagini P. Wind response of large roofs of stadiums and arena // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamic. – 2007. – № 95(9–11). – pp. 871-887.

78. Bouhaddi N., Lombard J.P. Improved free interface substructures representation method // *Computers & Structures*. – 2000. – Vol. 77. – №3. – pp. 269-283.
79. Curnier A. On three modal synthesis variants // *Journal of Sound and Vibration*. – 1983. Vol. 90. No. 4. pp. 527—540.
80. Craig R.R.Jr.. A Review of Time Domain and Frequency Domain Component Mode Synthesis Methods // *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*. – 1987. – Vol.3. – №2. – pp 59-72.
81. Craig R.R.Jr., Bampton M.C. Coupling of substructures for dynamic analysis // *AIAA Journal*. – 1968. – Vol.7. – pp 1313-1319.
82. Craig R., Chang C.-J. Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis // *AIAA Journal*. 1976. Vol. 14. No. 11. Pp. 1633—1635.
83. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1943. – Vol 49. – pp. 1–43.
84. Ding Z., Li L., Hu Y. A free interface component mode synthesis method for viscoelastically damped systems // *Journal of Sound and Vibration*. – 2016. – Vol. 365. – pp. 199-215.
85. Gibanica M., Abrahamsson T. J. S, Rixen D.J. A reduced interface component mode synthesis method using coarse meshes // *Procedia Engineering*. – 2017. – Vol. 199. – pp. 348-353.
86. Goldman R. L. Vibration analysis by dynamic partitioning // *AIAA Journal*. –1969. – Vol. 7. – №6. – pp. 1152-1154.
87. Grimes R.G., Lewis J.G., Simon H.D. A Shifted Block Lanczos Algorithm for Solving Sparse Symmetric Generalized Eigenproblems // *SIAM Journal Matrix Analysis Applications*. – 1996. – Vol. 15. – №1. – pp. 228-272.
88. Gruber F.M., Rixen D.J. Dual Craig-Bampton component mode synthesis method for model order reduction of nonclassically damped linear systems // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2018. – Vol. 111. – pp. 678-698.

89. Hale A.L., Meirovitch L. A General Substructures Synthesis Method for Dynamic Simulation of Complex Structures // *Journal of Sound and Vibration*. – 1980. – Vol. 69. – pp. 309—326.
90. Hale A.L., Meirovitch L. A general procedure for improving substructures representation in dynamic synthesis // *Journal of Sound and vibration*. – 1982. – Vol. 84. – №2. – pp. 269-287.
91. Herting D.N. A General Purpose, Multi-stage, Component Modal Synthesis Method // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 1985. – Vol 1. – pp. 153-164.
92. Hintz R. M. Analytical methods in component modal synthesis // *AIAA Journal*. – 1975. – Vol. 13. – №8. pp. 1007—1016.
93. Hou S. N. Review of modal synthesis techniques and a new approach // *The Shock and Vibration Bulletin*. – 1969. – №40. pp. 25—39.
94. Hurty W.C. Dynamic analysis of structural systems using component modes // *AIAA Journal*. – 1984. – Vol.4. – pp. 733-738.
95. Irretier H. A modal synthesis method with free interfaces and residual flexibility matrices for frame structures // *Stavebnicky asopis*. – 1989. – Vol. 37. – №9. – pp. 601-610.
96. Jakobsson H., Larson M.G. A posteriori error analysis of component mode synthesis for the elliptic eigenvalue problem // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2011. – Vol. 200. №41-44. – pp. 2840-2847.
97. Koutsovasillis P. Model Order Reduction in Structural Mechanics. Coupling the rigid and elastic multi body dynamics // *Dresden Technical University. Dissertation*. – 2009.
98. Kuhar E. J., Stahle C. V. Dynamic transformation method for modal synthesis // *AIAA Journal*. – 1974. – Vol. 12. – №5. pp. 672—678.
99. Lazzari M., Majowiecki M., Vitaliani R.V., Sietta A.V. Nonlinear F.E. analysis of Montreal Olympic Stadium roof under natural loading conditions // *Engineering Structures*. – 2009. – № 31(1). – pp. 16-31.
100. Leung Y.T. Dynamic substructure response // *Journal of sound and vibration*. – 1991. – Vol. 149. – №1. pp. 83-90.

101. Lu K., Liu Y., Zhang W., Qiu H., Mi W. Free-Interface Component Mode Synthesis Method with Link Substructure as Super-Element // *Procedia Engineering*. – 2011. – Vol. 16. – pp. 685-694.
102. MacNeal R.H. A hybrid method of component mode synthesis // *Computers and structures*. – 1971. – Vol. 4. – pp. 591-601.
103. Magalhães, F., Caetano, E., Cunha, Á. Operational modal analysis and finite element model correlation of the Braga Stadium suspended roof // *Engineering Structures*. 2008. – № 30(6). – pp. – 1688-1698.
104. Masson G., Brik B.A., Cogan S., Bouhaddi N. Component mode synthesis (CMS) based on an enriched ritz approach for efficient structural optimization // *Journal of Sound and Vibration*. – 2006. – Vol. 296. – №4-5. – pp. 845-860.
105. Martinez D.R., Carne T.G., Gregory D.L., Miller A.K. Combined experimental/ analytical modeling using component mode synthesis // *AIAA/ASME/ASCE/AHS 25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Palm Springs, AIAA Paper*. – 1984. – №8-0941. – pp. 140-152.
106. Martins N., Caetano E., Diord P., Magalhães F., Cunha Á. Dynamic monitoring of a stadium suspension roof: Wind and temperature influence on modal parameters and structural response // *Engineering Structures*. – 2014. – № 59. – pp. 80-94.
107. Meirovitch L., Hale A.L. A general dynamic synthesis for structures with discrete substructures // *Journal of sound and vibration*. – 1982. – Vol. 85. – №4. – pp. 445-457.
108. Millan E.R., Manguan M.C., Hidalgo F.S. A component mode synthesis based hybrid method for the dynamic analysis of complex systems // *Journal of Sound and Vibration*. – 2015. – Vol. 357. – pp. 285-299.
109. Morosow G., Abbott P. Mode selection // *Synthesis of Vibrating Systems*. – New York: ASME. – 1971. pp. 72 - 77.
110. Nagibovich A.I. Approbation of the developed technique of superelement simulation of dynamics for system “Basis–Foundations structures and stands –

Structures of the roof” for stadiums for the 2018 FIFA World Cup in Russia // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.– 2018.– Vol. 456.– №1.– P. _-_.

111. Nagibovich A.I., Belostosky A.M., Dmitriev D.S., Pavlov A.S., Aul A.A., Ostrovsky K.I., Dyadchenko Y.N. and Scherbina S.V. Features of the structural safety analysis (strain-stress state, dynamics, strength and stability) of stadiums for the 2018 FIFA World Cup in Russia. 2018 // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.– 2018.– Vol. 456.– №1.– P. _-_.

112. Papadimitriou C., Papadioti D.C. Component mode synthesis techniques for finite element model updating // Computers & Structures. – 2013. – Vol. 126. – pp. 15-28.

113. Przemieniecki J.S. Theory of matrix structural analysis. – McGraw-Hill Book Company, New York, N.Y. – 1968. – 481 p.

114. Rajakumar C., Rogers C.R. The Lanczos Algorithm Applied to Unsymmetric Generalized Eigenvalue Problems // International Journal for Numerical Method in Engineering. – 1991. – Vol.32. – pp. 1009-1026.

115. Rixen D.J. A dual Craig–Bampton method for dynamic substructuring // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 168. – №1–2. – pp. 383-391.

116. Rubin S. Improved component-mode representation for structural dynamic analysis // AIAA Journal. – 1975. – Vol. 13. – №8. – pp. 995—1006.

117. Sarsri D., Azrar L. Dynamic analysis of large structures with uncertain parameters based on coupling component mode synthesis and perturbation method // Ain Shams Engineering Journal. – 2016. – Vol. 7. – №1. – pp. 371-381.

118. Seshu P. Substructuring and Component Mode Synthesis. Review // Shock and Vibration. – 1997. – Vol. 4. – №3. pp. 199—210.

119. Shanmugam A. Padmanabhan C. A fixed–free interface component mode synthesis method for rotordynamic analysis // Journal of Sound and Vibration. – 2006 Vol. 297. – №3–5. – pp. 664-679.

120. Shyu W.H., Ma Z.D., Hulbert G.M. A new component mode synthesis method: Quasi-static mode compensation // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 1997. – Vol. 24. – №4. – pp. 271-281.
121. Sotiropoulos G.H. Comment on the substructure synthesis methods // *Journal of Sound and vibration*. – 1984. – Vol. 94. – №1. – pp. 150-153.
122. Takewaki I. Inverse component-mode synthesis method for redesign of large structural systems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1998. – Vol. 166. – №3-4. – pp. 201-209.
123. Tran D.M. Component mode synthesis methods using interface modes. Application to structures with cyclic symmetry // *Computers & Structures*. – 2001. – Vol. 79. – №2. – pp. 209-222.
124. Tran D.M. Component mode synthesis methods using partial interface modes: Application to tuned and mistuned structures with cyclic symmetry // *Computers & Structures*. – 2009. – Vol. 87. – №17-18. – pp. 1141-1153.
125. Wang J.H., Chen H.R. Substructure modal synthesis method with high computation efficiency // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. – 1990. – Vol.79. – №2. – pp.203-217.
126. Wang T., He H., Yan W., Chen G.P. A model-updating approach based on the component mode synthesis method and perturbation analysis // *Journal of Sound and Vibration*. – 2018. – Vol. 433. – pp. 349-365.
127. Weng S., Xia Y., Xu Y.L., Zhu H.P. Substructure based approach to finite element model updating // *Computers & Structures*. – 2011. – Vol. 89. – №9-10. – pp. 772-782.
128. Yu J., Xia Y., Lin W., Zhou X. Element-by-element model updating of large-scale structures based on component mode synthesis method // *Journal of Sound and Vibration*. – 2016. – Vol. 362. – pp. 72-84.
129. Zu-Qing Qu. *Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis* // Springer Publications. – 2004. – 369 p.