

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

04.2.01 1 66720 -

На правах рукописи



**ПАВЛОВ АНДРЕЙ СЕРГЕЕВИЧ**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ  
КОНСТРУКЦИЙ БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ СООРУЖЕНИЙ**

Специальность 05.13.18 –

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
д.т.н., проф. Белостоцкий А. М.

Москва – 2011

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Обзор современного состояния области моделирования деформирования и разрушения строительных конструкций.....</b>	<b>10</b>
1.1. Общие положения .....	10
1.2. Обзор численных методов и программных комплексов численного моделирования деформирования и разрушения конструкций.....	31
1.3. Современная практика анализа и моделирования процессов разрушения и обрушения конструкций зданий и сооружений .....	35
<b>Глава 2. Методика численного моделирования процессов деформирования и разрушения конструкций большепролетных сооружений. Выбор методов и способов моделирования.....</b>	<b>39</b>
2.1. Постановка задачи численного моделирования процессов деформирования и разрушения .....	39
2.2. Методика решения задач деформирования и разрушения конструкций.....	40
2.3. Выбор численного метода решения нелинейных динамических задач деформирования и разрушения конструкций .....	43
2.3. Упругопластические модели материалов.....	76
2.4. Контактные алгоритмы .....	77
2.5. Выбор базового программного комплекса проведения расчетов.....	79
<b>Глава 3. Верификация методики расчетов нелинейных процессов деформирования и разрушения .....</b>	<b>85</b>
3.1. Общие сведения о верификации.....	85
3.2. Задачи с геометрической нелинейностью .....	86
3.3. Задачи с физической нелинейностью .....	95

3.4. Динамические физически-, геометрически- и конструктивно нелинейные задачи.....	106
3.5. Матрица верификации.....	116
<b>Глава 4. Объектно-ориентированный исследовательский программный модуль InterDYN.....</b>	<b>118</b>
4.1. Общее описание программного модуля .....	118
4.2. Структура нейтрального файла InterDYN .....	120
4.3. Функции программного модуля .....	122
<b>Глава 5. «Ретроспективное» моделирование процесса деформирования и разрушения большепролетного сооружения.....</b>	<b>128</b>
5.1. Общие данные .....	128
5.2. Оценочный статический расчет.....	133
5.3. Численное моделирование процессов деформирования и разрушения конструктивных узлов сооружения .....	137
5.4. Исследование напряженно-деформированного состояния и устойчивости модели «Колонна - распорки».....	145
5.5. Численное моделирование сценарного деформирования, разрушения и обрушения большепролетного сооружения.....	149
<b>ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ.....</b>	<b>159</b>
<b>Литература.....</b>	<b>161</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** Задача адекватного численного моделирования процессов деформирования и разрушения тяжело нагруженных конструкций большепролетных сооружений с учетом значимых эффектов нелинейностей в статической и динамической постановках является актуальным вопросом в современной теории и практике расчетов. Недавние печально известные примеры обрушения конструкций покрытий СОК «Трансвааль-парк» и здания Басманного рынка, локального разрушения узла ККЦ «Крылатское» и др. – подтверждение этого положения.

Большинство используемых расчетных методик представляют собой квинтэссенцию инженерных подходов, ограничивающихся областями статических расчетов и учитывающих возникновение динамических эффектов через введение полуэмпирических коэффициентов.

Исходя из современных вычислительных возможностей, наиболее эффективным подходом к решению данной комплексной задачи становится метод конечных элементов с прямым интегрированием по времени нелинейных (включая эффекты физической, геометрической и конструктивной нелинейностей) уравнений динамики. При этом важным в методологическом и практическом смыслах представляется разработка методики в рамках единого алгоритма, реализующей разномасштабную, с проявлением различных механизмов разрушения, работу критических узлов и всей конструкции.

Разработка верифицированной методики и ее программной реализации, основанной на численном моделировании задач деформирования и разрушения конструкций большепролетных сооружений, позволит отечественным специалистам проводить полный анализ поведения конструкций, влияния деформативности и действительных схем работы узлов на работу всего сооружения в целом, оценить возможные сценарии процессов обрушения в результате локальных структурных изменений.

**Цели и задачи работы.** Целью работы являлась разработка, программная реализация и верификация методики комплексного расчета статических и динамических процессов деформирования и разрушения конструктивных узлов и обрушения большепролетных сооружений, основанной на едином алгоритме нелинейной динамики и позволяющей проводить решение результирующих сильно нелинейных задач в форме вычислительного эксперимента.

Исходя из поставленной цели работы, решались следующие задачи:

- Анализ результатов отечественных и зарубежных теоретических и экспериментальных исследований в данной области.
- Обоснованный выбор эффективного метода численного решения подобных задач.
- Разработка комплексной методики многоэтапного расчета задач деформирования и разрушения от локальных узлов к полной конструкции.
- Разработка программного интерфейса к «базовому» программному комплексу с целью автоматизации проведения расчетов.
- Верификация разрабатываемой методики и реализующего программного обеспечения на основе сравнения результатов расчетов с результатами испытаний.
- Применение разработанной методики и реализующего программного обеспечения для моделирования реального процесса деформирования и обрушения большепролетного сооружения, с выявлением действительной работы и критической нагрузки разрушения узлов конструкций.

**Методы и средства исследований.** Методами и средствами исследований являются современные математические модели механики деформируемого твердого тела и численные методы решения задач нелинейной динамики конструкций во временной области.

**Научная новизна:**

- Разработана комплексная методика численного моделирования процессов деформирования и разрушения конструкций большепролетных со-

оружений в трехмерной динамической постановке с учетом значимых эффектов физической, геометрической и конструктивных нелинейностей.

- Разномасштабная и с проявлением различных механизмов разрушения работа «критических» узлов-элементов и всей конструкции реализована в рамках единого алгоритма нелинейной динамики на основе метода конечных элементов с явной схемой интегрирования по времени.

- Методика верифицирована на представительном наборе статических и динамических задач с развитыми эффектами физической, геометрической и конструктивной нелинейности.

- Методика использована для «ретроспективных» нелинейных динамических расчетов реальных конструктивных узлов и конструкции покрытия спортивно-оздоровительного комплекса «Трансвааль-парк». Подтвержден зафиксированный в 2004 г. сложный нелинейный характер деформирования и локального инициирующего разрушения конструктивных узлов и прогрессирующий характер обрушения всей системы.

#### **Практическое значение:**

- Разработанная методика численного моделирования позволяет решать практические задачи деформирования и разрушения тяжело нагруженных узлов-элементов и всей конструкции большепролетных сооружений на стадиях их проектирования, эксплуатации-мониторинга и экспертизы.

- Разработан проблемно-ориентированный для строительной области программный модуль Inter-DYN, автоматизирующий проведение вычислительных экспериментов с формированием полного программного кода для входного файла расчетного процессора ПК LS-DYNA и картин визуализации для постпроцессора.

- Решенные верификационные задачи можно использовать как основу для проведения верификации ПК LS-DYNA в системе Российской академии архитектуры и строительных наук.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается:

- использованием апробированного математического аппарата (математические модели механики деформируемого твердого тела) и численные методы решения задач нелинейной динамики конструкций во временной области;
- успешным решением представительного набора верификационных тестовых задач;
- согласованием получаемых результатов с результатами натурных замеров, сходными картинами разрушения конструкций.

**Внедрение.** Методика и программное обеспечение применяются в ГУП МНИИП Моспроект-4, Научно-образовательном центре компьютерного моделирования (НОЦ КМ) МГСУ и Научно-исследовательском центре «СтаДиО» для практических расчетов конструкций большепролетных сооружений.

**Личный вклад соискателя.** Все разработки и исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

**На защиту выносятся:**

- Методология численного моделирования процессов деформирования и разрушения конструкций большепролетных сооружений с учетом значимых эффектов физической, геометрической и конструктивной нелинейностей во времени.
- Результаты представительной серии верификационных задач, решенных в обоснование достоверности и эффективности разработанной методики и базового программного обеспечения.
- Разработанный проблемно-ориентированный программный модуль для проведения вариантных вычислительных экспериментов, позволяющий в автоматизированном режиме формировать полный программный код для всех этапов расчета.

- Результаты исследования напряженно-деформированного состояния, устойчивости и механизмов разрушения наиболее нагруженных узлов и обрушения конструкций покрытия СОК «Трансвааль-парк» по разработанной методике.

**Апробация научных положений**, основных результатов выполненного исследования произведена в виде докладов на научно-технических конференциях и семинарах:

- Первая международная научно-практическая конференция «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы», 2008 г.

- Третий Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений». Новочеркасск, 21-24 июня 2010 г.

- IV Международная научно-практическая конференция «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы». 2011 г.

**Публикации.** По тематике диссертации опубликовано семь работ, в том числе две работы в изданиях, включенных ВАК в перечень рекомендуемых.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы.

**Во введении** приводится обоснование актуальности работы, определены предметы, цели и задачи исследований, перечислены основные научные и практические результаты, приведено краткое содержание диссертации по главам.

**В первой главе** приводится аналитический обзор современного состояния вопросов теории нелинейного деформирования и разрушения конструкций. Приведены основные выкладки механики деформируемого твердого тела. Рассмотрены классические и современные теории пластичности, наиболее распространенные модели нелинейного деформирования и разрушения материалов, численные методики моделирования контактных взаимодей-



ствий, современные подходы и нормативные документы по численному моделированию напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом физической, геометрической и конструктивной нелинейностей, в том числе, востребованные при расчетах на прогрессирующее обрушение. Приведены описания современных коммерческих программных комплексов (ANSYS, ABAQUS, AUTODYN, LS-DYNA, NASTRAN и т. п.) на базе методов конечных элементов, применение которых позволяет эффективно решать рассматриваемый класс задач.

**Во второй главе** приведена постановка диссертационной задачи, описана разработанная методика численного моделирования квазистатических и динамических процессов нелинейного деформирования и разрушения конструкций, произведен отбор численного метода решения поставленной задачи с приведением теоретических выкладок, произведен выбор основного программного комплекса, используемого для проведения расчетов.

**В третьей главе** представлена верификация методики расчетов нелинейных динамических и квазистатических процессов деформирования и разрушения, приведены тринадцать верификационных примеров с развитыми физическими, геометрическими и конструктивными нелинейностями, представлена сводная «матрица верификации» разработанного подхода.

**В четвертой главе** представлено описание разработанного объектно-ориентированного исследовательского программного модуля InterDYN, предназначенного для автоматизации процесса применения методики на практике.

**В пятой главе** рассматривается применение разработанного подхода численного решения сложной практической задачи – нелинейному деформированию и разрушению узлов-элементов и обрушению конструкций покрытия СОК «Трансвааль-парк» (г. Москва).

Основные выводы по отдельным главам обобщены в **заключении**.

# ГЛАВА 1. ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБЛАСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Надежность и безопасность зданий и сооружений с развитием численных методов и мощностей современных вычислительных систем все более связывается с формированием научных подходов моделирования действительной работы конструкций для нормального и аварийного режимов эксплуатации. Для первого и основного из режимов важным вопросом становится возможность возникновения неучтенных зон, в которых возникают неконтролируемое, нелинейное деформирование и накопление повреждений материалами, и как следствие, изменение схемы работы конструктивных узлов с возможным разрушением, переход сооружения в аварийное состояние с вероятностью обрушения. Способом решения данного вопроса становится применение численных методов нелинейной динамики и механики деформируемого твердого тела.

## 1.1. Общие положения

### 1.1.1. Общие уравнения механики деформируемого твердого тела

Любое внешнее воздействие на тело сопровождается тем, что все точки получают ускорения, и как следствие возникновения движения, появления полей перемещений  $u$  (образует поля тензора деформаций  $\varepsilon$  и тензора напряжений Коши  $\sigma$ ) и скоростей  $v$ .

Напряженное состояние любой точки тела определяется тензором напряжений  $\sigma$

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

$\sigma_{ii}$  – нормальные напряжения, остальные – касательные напряжения

Тензор напряжений  $\sigma$  представляется суммой двух тензоров – шарового тензора напряжений  $S_\sigma$

$$S_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

и девиатора тензора напряжений  $D_\sigma$ .

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{vmatrix}, \quad (1.3)$$

$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$  – среднее напряжение, где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения.

ния.

Тензор напряжений имеет три основных инварианта: первый – линейный  $T_{1\sigma}$ , второй – квадратичный  $T_{2\sigma}$ , третий – кубический  $T_{3\sigma}$

$$\begin{aligned} T_{1\sigma} &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ T_{2\sigma} &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \\ T_{3\sigma} &= \sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Интенсивность напряжений  $\sigma_i$  можно определить следующими способами:

– через главные напряжения

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (1.5)$$

– через инварианты тензора напряжений

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3T_{2\sigma} - T_{1\sigma}^2} \quad (1.6)$$

Деформированное состояние любой точки тела определяется тензором деформации  $\varepsilon$ .

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций,  $i, j$  – индексы

Компоненты  $\varepsilon_{ii}$  – компоненты продольных деформаций, остальные – компоненты сдвиговых деформаций.

Тензор деформаций  $\varepsilon$  может быть представлен в виде суммы двух тензоров:

– Шарового тензора деформаций  $S_\varepsilon$  (отвечает за изменение объема без изменения формы частиц)

$$S_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

– Девиатора тензора деформаций  $D_\varepsilon$  (отвечает за изменение формы материальных частиц)

$$D_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_0 \end{vmatrix}, \quad (19)$$

$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$  – средняя деформация, где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – главные деформации

ции

Тензор деформаций имеет три основных инварианта: первый – линейный  $T_{1\varepsilon}$ , второй – квадратичный  $T_{2\varepsilon}$ , третий – кубический  $T_{3\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned} T_{1\varepsilon} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ T_{2\varepsilon} &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \\ T_{3\varepsilon} &= \varepsilon_1^3 + \varepsilon_2^3 + \varepsilon_3^3 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Интенсивность деформаций  $\varepsilon_i$  определяется через главные деформации

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2} \quad (1.11)$$

через инварианты следующим образом

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{3T_{2\varepsilon} - T_{1\varepsilon}^2} \quad (1.12)$$

Скорость изменения деформированного состояния определяется тензором скоростей деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \quad (1.13)$$

где  $\nabla_i$  – оператор Гамильтона

$v_i$  – вектор скорости

Компоненты тензора напряжений можно представить в виде зависимости от компонент тензора деформаций, тензора скорости деформаций и температуры

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, T) \quad (1.14)$$

Физическое поведение деформируемых сред определяется способностью сопротивляться изменению объема частиц, механическое – способностью деформируемых сред реагировать на формоизменение.

Физическое поведение определяется через функцию связующую шаровые тензоры напряжений и деформаций

$$S_\sigma = f(S_\varepsilon), \quad (1.15)$$

механическое поведение – через функцию связующую девиаторы напряжений и деформаций

$$D_\sigma = f(D_\varepsilon) \quad (1.16)$$

Девииаторам деформаций и напряжений соответствуют скалярные величины – интенсивность деформаций  $\varepsilon_i$  и интенсивность напряжений  $\sigma_i$ , соответственно.

Механическое поведение среды в общем виде может быть представлено можно представить в следующем виде:

$$\sigma_i = f_i (\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, p, T, \dots) \quad (1.17)$$

Выражение (1.17) – определяющее уравнение.

Среднее напряжение равно давлению  $p$  в данной точке ( $\sigma = -p$ ), тогда уравнение описания физического поведения может быть представлено как

$$p = p(\rho, T) \quad (1.18)$$

Выражение (1.18) – уравнение состояния среды.

Различают разные модели среды:

- простые модели сплошной среды, учитывающие одно из механических свойств:
  - Модель среды, способной оказывать сопротивление изменению формы своих частиц, – идеальная среда. В этой модели

$$p = p(\rho, T) \quad (1.19)$$

$$\sigma_{ij} = -p g_{ij} \quad (1.20)$$

где  $g_{ij}$  – символ Кронекера.

- Среда, учитывающая проявление свойств пластичности – жесткопластическая среда.

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_1}{\sigma_T} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}) \quad (1.22)$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести материала.

- Модель изотропной сжимаемой сплошной среды, с линейно зависящим сдвиговым и объемным сопротивлением от скоростей деформаций – модель вязкой жидкости. Уравнения, определяю-

щие физическое и механическое поведение среды, имеют вид

$$\sigma = -p + 3\lambda\dot{\epsilon}_0, \quad p = p(\rho, T) \quad (1.21)$$

$$D_\sigma = 2\mu D_\epsilon, \quad (1.22)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – динамические коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости,  $\dot{\epsilon}_0$  – средняя скорость деформаций.

– сложные модели сплошной среды – модели, в которых учитываются два и более основных механических свойства:

- идеальная пластическая модель;
  - жесткопластическая модель с линейным упрочнением;
  - жесткопластическая модель с нелинейным упрочнением;
  - упругопластическая модель с линейным упрочнением;
  - упругопластическая модель с нелинейным упрочнением;
- и др.

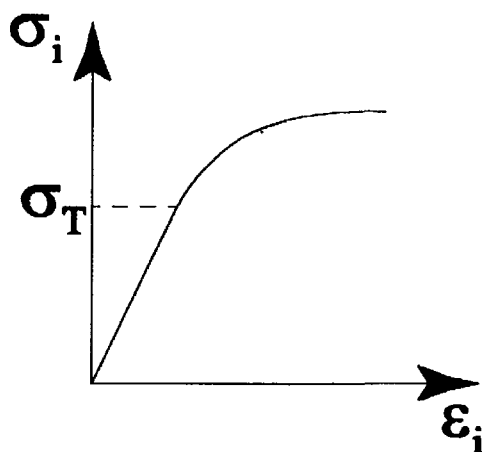


Рисунок 1.1. Упругопластическая модель с нелинейным упрочнением

### 1.1.2. Классические и современные теории пластичности, критерии пластичности

Классические теории пластичности (теория малых упругопластических деформаций Ильюшина [1] и теория пластичности Прандтля-Рейсса [184], [185], [187]) основываются на изотропном поведении материала. Для больших деформаций теория пластичности Прандтля-Рейсса (так же известна как теории пластического течения) считается более точной.

Обе теории сходны по ряду пунктов:

- В пластической области материал несжимаем
- Деформации могут быть представлены в виде суммы упругих и пластических составляющих:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl} \quad (1.23)$$

- Приращение упругих деформаций определяется из закона Гука
- Появление пластических деформаций происходит при выполнении условия возникновения пластичности.

Различия теории сводятся к принимаемому закону изменения тензора пластических деформаций. В теории пластичности Прандтля-Рейсса принимается ассоциативный закон течения, а в основе теории малых упругопластических деформаций Ильюшина заложено предположение о соосности дивергента тензора напряжений и тензора пластической деформации.

Стоит так же отметить теории пластичности:

- Теория Свайнгера [163], [164], [165]
- Теория Прагера [197], [196], [198]

Классическими критериями возникновения пластичности считаются:

- Критерий Кулона (критерий наибольшего касательного напряжения). Получен в 1776 году [134].
- Критерия Треска – Сен-Венана

$$\sigma_T = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (1.24)$$



$\sigma_T$  – предел текучести при одноосном растяжении

установлен Анри Треска в 1864 году и опубликован в [149], [191], [192]. Позднее был использован при построении теории пластичности Сен-Венаном [100].

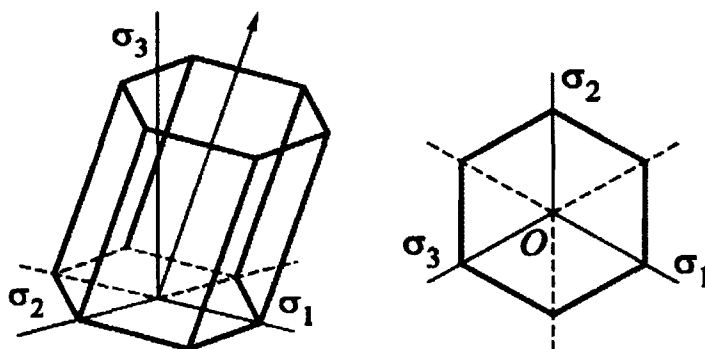


Рисунок 1.2. Поверхность текучести по критерию Треска – Сен-Венана

– Критерий Губера – Мизеса – Хенки (критерий потенциальной энергии изменения формы) [155], [69], [26]

$$\sigma_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1.25)$$

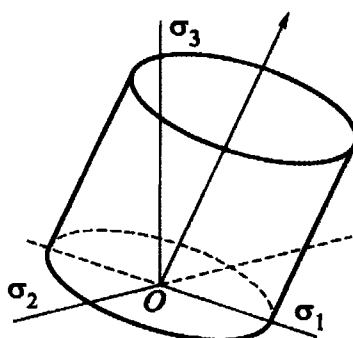


Рисунок 1.3. Поверхность текучести Губера – Мизеса – Хенки

Из современных теорий можно выделить: теорию упругопластических процессов А.А. Ильюшина, модификации теории пластического течения (ТПТ), статистические теории пластичности, физические теории пластичности и реономная теория пластичности.

*Теория упругопластических процессов А.А. Ильюшина* [43]. В рамках данной теории пластичности используется предложенное Ильюшиным векторное представление процесса деформирования. Согласно этому представлению; пяти независимым компонентам девиатора деформаций (напряжений) во взаимно однозначное линейное соответствие ставятся пять компонент вектора деформаций (напряжений), которые относят к векторам ортонормированного, фиксированного в соответствующем пространстве (деформаций или напряжений) базиса  $a_i$ . Производные данной теории: теория пластичности для траекторий малой кривизны [18], теория пластичности для траекторий средней кривизны [39].

*Модификации теории пластического течения* [77]. Производные теории пластического течения в основном ориентируются на применении различных законов упрочнения. Выделяются как одноповерхностные (Кадашевич, [45]), так и многоповерхностные (Мроз, [172]) теории; в рамках которых формулируются законы переноса и эволюции форм поверхностей течения.

*Статистические теории пластичности.* Одним из наиболее распространенных подходов статистических теорий пластичности является *статистический подход* [75]. В рамках него выделяются микроструктурные элементы исследуемого материала, поведение которых стараются описать однотипными законами, с использованием минимального количества физических характеристик. В дальнейшем, на основании представительной выборки, осуществляется статистическое осреднение. Недостатком подхода, по мнению [75], является недостаточная точность описания для упругопластической стадии по сравнению с упругой.

Среди моделей физической теории пластичности можно выделить модели: модель Бишопа-Хилла [130], [129], модель Линя [65], [168].

Реономная теория пластичности получила распространение благодаря трудам А. Н. Супруна [102], [103]. В рамках теории рассматриваются пластические и реономные эффекты как проявление единого процесса деформирования среды.

### 1.1.3. Численные модели динамического деформирования материалов

Популярными моделями динамического деформирования в современных программных комплексах считаются модели: Cowper-Symonds [143], Johnson-Cook ([161], [162]), Steinberg-Guinan [190], Zerilli-Armstrong ([203], [204]), Gurson-Tvergaard ([147], [193], [194]) (см. табл.1.1). В их основу положены соотношения ассоциированной теории течения [184], [185], [187], при этом критерий пластичности совпадает с пластическим потенциалом.

Таблица 1.1. Модели деформирования материалов

Наименование	Условие текучести
Cowper-Symonds	$\sigma_i = k(\varepsilon^p)^n \left( 1 + \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{C} \right)^{\frac{1}{p}} \right)$
Johnson-Cook	$\sigma_i = \left( C_1 + C_2 (\varepsilon^p)^n \right) \left( 1 + C_3 \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right) \left( 1 - \frac{T}{T_{\text{mт}}} \right)^m$
Steinberg-Guinan	$\sigma_i = \sigma_{i0} \left( 1 - \frac{T - T_0}{T_{\text{mт}} - T_0} \right)^\alpha (1 + C_1 \varepsilon^p)^{\frac{1}{n}} (1 + C_2 \dot{\varepsilon}^p)^{\frac{1}{m}}$
Zerilli-Armstrong	$\sigma_i = C_0 + C_1 e^{-C_2 T + C_3 T \ln(\dot{\varepsilon})} + C_4 (\varepsilon^p)^n$
Gurson-Tvergaard	$\left( \frac{\sigma_i}{\sigma_{i0}} \right)^2 + 2q_1 f^* \cosh \left( \frac{q_2 \times (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{2\sigma_i} \right) - \left( 1 + (q_1 f^*)^2 \right)$

В основе всех потенциалов, кроме модели Gurson-Tvergaard, лежит ряд констант и функциями учета трех основных факторов напряженно-деформированного состояния на условие текучести: интенсивности тензора пластических деформаций и скоростей деформаций, а так же температуры. Процесс и история изменения указанных факторов оказывает существенное влияние на конечную диаграмму деформирования материала.

Данные потенциалы предоставляют достаточную информацию о состоянии НДС в конкретный момент и истории изменения в рамках выбранного подхода. Основываясь на данной информации, становится возможным формулирование и применение автономных моделей динамического разрушения. При этом достоверность применяемой модели разрушения будет определяться адекватностью применяемой модели деформирования:

Один из способов учета кинематического упрочнения и динамического эффекта Баушингера в численных моделях деформирования материалов был предложен Кадашевичем и Новожиловым в [44].

Для описания деформационной анизотропии материала при знакопеременных процессах деформирования в модель включается тензор микронапряжений  $\alpha_{ij}$ .

С учетом этого параметра интенсивность напряжений будет иметь следующий вид, предложенный в [46] Казаковым и Капустиным:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_{kl} - \alpha_{kl})(\sigma_{kl} - \alpha_{kl})} \quad (1.26)$$

В работе [46] так же предполагается, что в общем случае тензор  $\alpha_{ij}$  имеет ненулевой вид и отвечает, как за кинематическую составляющую упрочнения (трансляция поверхности текучести), так и за изотропную (расширение поверхности текучести).

В отличие от указанной работы в ряде программных комплексов тензор  $\alpha_{ij}$  отвечает только за кинематическую составляющую, а изотропная составляющая вводится через параметр  $\gamma$ .

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_{kl} - \alpha_{kl})(\sigma_{kl} - \alpha_{kl}) - \gamma^2} \quad (1.27)$$

#### 1.1.4. Численные модели динамического разрушения

Большую часть существующих моделей механических теорий прочности [3] относят к однопараметрическим теориям прочности. Так же ряд данных по механическим теориям прочности в отечественной литературе содержится в [46], [62], [63], [29], [27], [59], [72].

За основные параметры напряженно-деформированного состояния в момент наступления разрушения в данных теорий принимаются либо эквивалентные деформации, либо эквивалентные напряжения. Момент разрушения материала определяется через достижение критических значений указанных параметров. В таблице 1.2 представлен ряд типов разрушения и их критериев.

Таблица 1.2. Типы разрушений и их критерии

<i>Тип описывающего параметра и тип разрушения</i>	<i>Параметры</i>	<i>Критерий разрушения</i>
Деформационные параметры (сдвиг, полосы адиабатического сдвига)	$\varepsilon_1$ $\varepsilon_3$ $\gamma_1$ $\Delta\varepsilon^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3}\Delta\varepsilon_{ij}^{pl}\Delta\varepsilon_{ij}^{pl}}$	$\varepsilon_1 > \varepsilon_{\max}$ $\varepsilon_3 < \varepsilon_{\min}$ $\gamma_1 > \gamma_{\max}$ $\sum \Delta\varepsilon^{pl} > \varepsilon_{\max}^{pl}$

<i>Тип описывающего параметра и тип разрушения</i>	<i>Параметры</i>	<i>Критерий разрушения</i>
Силловые параметры (отрыв, откол)	$\sigma_1$ $P$ $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma'_{ij}\sigma'_{ij})}$ $\Delta K^\sigma = (\sigma_1 - \sigma_0)^2 \Delta t$	$\sigma_1 > \sigma_{\max}$ $P < P_{\min}$ $P > P_{\max}$ $\bar{\sigma} > \bar{\sigma}_{\max}$ $\sum \Delta K^\sigma = K_{\max}^\sigma$
Энергетические параметры (трещинообразование, крошение)		

При моделировании квазистатических процессов деформирования используются в основном склерономные модели (не учитывающие время упругопластических деформаций). В них используется гипотеза «единой кривой деформирования», в которой используется единая функция интенсивности напряжений  $\sigma_1$ , зависящая от интенсивности пластических деформаций:  $\varepsilon_1^{pl}$ , для всех видов напряженно-деформированного состояния.

$$\sigma_1 = f(\varepsilon_1^{pl}) \quad (1.28)$$

Для склерономных моделей, используемых при моделировании процессов деформирования и разрушения, характерно использование связующих функций и критериев разрушения не зависящих от скорости изменения пластических деформаций. При этом поверхность разрушения модифицируется через введение ряда множителей.

Для зависящего от времени (реономного) динамического деформирования в уравнение диаграммы (1.28) вводится параметр, учитывающий скорости деформирования (скорость изменения пластических деформаций  $\dot{\varepsilon}_1^{pl}$ ), в результате чего функция приобретает следующий вид

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i^{pl}, \dot{\varepsilon}_i^{pl}) \quad (1.29)$$

Использование моделей пластичности, зависящих от скорости деформаций  $\dot{\varepsilon}_i^p$ , предполагает применение прямого численного интегрирования процессов деформирования и накопления повреждений для любых (в том числе и простых) путей нагружения.

При наличии в задаче температурных воздействий  $T$  и достаточно больших средних напряжений  $\sigma_{cp}$  количество аргументов в функции (1.29) расширяется до четырех

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i^{pl}, \dot{\varepsilon}_i^{pl}, T, \sigma_{cp}) \quad (1.30)$$

На основании экспериментальных данных, приведены в [61]; об испытаниях конструкционных материалов и их разрушении при квазистатическом и динамическом нагружении можно говорить, что для получения качественных динамических диаграмм деформирования и пределов прочности, зависящих от времени деформирования, необходимо получение большого числа стандартизированных и унифицированных параметров при различных скоростях деформирования для дальнейшего использования в описывающих моделях.

Виды накопления повреждений при динамическом деформировании можно разделить следующим образом:

– *Квазиравновесное накопление повреждений* – процесс динамического деформирования материала, при котором параметры напряженно-деформированного состояния не превышают пределы прочности, зависящие от скорости изменения пластических деформаций  $\dot{\varepsilon}_i^{pl}$ . Изменение скоростей деформирования принимается плавным.

– *Существенно-неравновесное накопление повреждений* – неравновесный процесс динамического деформирования материала, зависящий от времени воздействия, сопровождающийся кратковременным локальным превышением пределов прочности материала при установившейся скорости деформиро-

вания, возможно кратковременное превышение критериев разрушения. С учетом этого, наступление разрушения на макроуровне происходит с запаздыванием (через определенный интервал времени) в момент накопления критического объема микроразрушений.

Среди алгоритмов суммирования повреждений преобладают преимущественно схемы линейного суммирования. Ряд из них представлен в работах [158], [159], некоторые вынесены в таблицу 1.3.

Таблица 1.3. Схемы линейного суммирования повреждений

Модель	Схема суммирования	Критерий разрушения
Длина траектории пластического деформирования	$\varepsilon_i^{pl} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}} dt \text{ или } \varepsilon_i^{pl} = \int_0^{\varepsilon_i^{pl}} \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^{pl} d\varepsilon_{ij}^{pl}}$	$\varepsilon_i^{pl} \geq \varepsilon_i^{pl*}$
Tuler-Butcher	$K^\sigma = \int_0^t B(\sigma_1 - \sigma_0)^n H(\sigma_1 - \sigma_0) dt$	$K^\sigma = 1$
Johnson-Cook	$\omega = \int \frac{d\varepsilon^{pl}}{\varepsilon_*^{pl}}, \text{ где}$ $\varepsilon_*^{pl} = \left( D_1 + D_2 \times e^{\left( \frac{D_3 \times \sigma_{II}}{3\sigma_1} \right)} \right) \times (1 + D_4 \times \ln \dot{\varepsilon})$	$\omega = 1$
Gurson-Tvergaard	$f^* = \int_0^t (\dot{f}_{\text{рост}} + \dot{f}_{\text{зарожд}}) dt$ $\dot{f}_{\text{рост}} = (1 - f) \dot{\varepsilon}_{kk}^{pl}$ $\dot{f}_{\text{зарожд}} = A \dot{\varepsilon}^{pl}$ A – коэффициент	$f^* > f^c$ $f^c$ – критический объем зарождения трещин



Схема «длина траектории пластического деформирования» – производится интегрирование по времени процесса деформирования вдоль траектории пластического деформирования. Относится к виду квазиравновесного накопления повреждений.

Реализуемая схема в рамках модели Tuler-Butcher [139] используется при исследовании процесса разрушения материала в виде откола. Относится к неравновесному процессу накопления повреждений.

Реализуемая схема в рамках модели Johnson-Cook [161], [162] – процесс квазиравновесного накопления повреждений, при котором момент разрушения наступает, когда функция  $\omega = \int \frac{d\varepsilon^{pl}}{\varepsilon_*^{pl}}$  принимает значение 1.

Реализуемая схема в рамках модели Gurson-Tvergaard – схема усложненного суммирования повреждений. Ее описание приводится в работах [147], [193], [194].

#### *1.1.5. Обзор алгоритмов численного решения контактных задач*

В современной практике численного моделирования присутствует достаточно большое число контактных алгоритмов, часть которых в виде обзора описана в сборнике Александрова и Воровича [5].

На основании описания движения сплошной среды Бураго и Кукуджанов в работе [19] вводят классификацию контактных алгоритмов следующим образом:

- Лагранжевы алгоритмы
- Эйлеровы алгоритмы
- Произвольные эйлерово-лагранжевы алгоритмы

Классификация и описание эйлеровых и произвольных эйлерово-лагранжевых алгоритмов приведена в [19].

Для задач деформирования и разрушения конструкций характерно решение в Лагранжевом пространстве и, как следствие, применение лагранжевых

алгоритмов, подразделяющихся на алгоритмы расчета с абсолютно жестким телом и алгоритмы сквозного счета.

*Лагранжевы алгоритмы расчета контакта с абсолютно жестким телом.* В большинстве своем работы по расчету данного типа контакта сводятся к случаю взаимодействия тела с абсолютно жестким штампом или преградой. Процесс движения твердого тела принимается изначально определенным. В зависимости от используемого алгоритма, также возможен учет сил трения, через шероховатость поверхности контакта (граница твердого тела принимается за поверхность скольжения).

*Лагранжевы алгоритмы сквозного счета.* В данном типе алгоритмов применяется лагранжева сетка с общими узлами и непрерывным решением при переходе через контактную границу, зоны разрыва контактов моделируются через введение локальных градиентов.

Среди данного типа алгоритмов можно выделить следующие виды:

– *Алгоритмы идеального контакта согласованной сетки* представлены в [95], [94], [105]. Используется для изначально определенных зон контактов, при условии решения задачи в условиях малых деформаций. Реализуются условия идеального контакта с учетом «слипания».

– *Алгоритмы идеального контакта несогласованной сетки* для плоской задачи представлены в [9], для объемной задачи подход развит в работах [8],[182].

– *Алгоритмы буферного слоя* представлены в [144], [67], [83], [58]. Данный вид алгоритмов имитирует разрыв через введение в зону раскрытия контакта промежуточного слоя и, как следствие, возникновение зоны больших градиентов. Реализация контакта в этом случае будет сильно зависеть от свойств слоя.

– *Моделирование зон разрушения дискретными частицами* [160], [125], [126]. В рамках подхода, при условии выполнения в лагранжевой ячейке критерия разрушения, связи между узлами в зоне разрушения освобождаются, а

напряжения сходят к нулю. В дальнейшем ячейка может работать только на сжатие.

При условии наличия большого числа ячеек на граничных поверхностях в процессе счета, для качественного решения задачи, требуется введение механизмов определения неизвестных зон контактного взаимодействия. Поиск зоны контакта возможен двумя путями:

- по прониканию граничных узлов в граничные ячейки
- по сближению узлов или ячеек

На выходе получают контактные пары «узел – узел», «узел – ячейка» и «ячейка – ячейка». Для данного подхода существует один минус – число подобных операций пропорционально квадрату числа граничных ячеек.

С целью снижения объема операций был разработан ряд алгоритмов ускоренного поиска зоны контакта:

– *Алгоритм «главный-подчиненный»* (master-slave algorithm) [148]. Один из первых алгоритмов поиска. Экономия достигается за счет изначального указания возможных зон контакта и определения главных (граничные ячейки) и подчиненных поверхностей контакта (граничные узлы). В дальнейшем производится определение проникновения между узлами подчиненной поверхности и ячейками главной.

– *Глобальный алгоритм заполнения пространства кривыми* (SFC) [136]. Основывается на иерархическом делении объема на ячейки до тех пор, пока в каждой ячейке не окажется по одному узлу. Узлу присваивается бинарный позиционный код расположения. Определение ближайших узлов производится с применением алгоритмов быстрого сравнения позиционных кодов.

– *Глобальный алгоритм иерархии территории* (НІТА) [205]. Алгоритм основан на поиске зон контакта между близкорасположенными группами граничных элементов. При выполнении критерия обнаружения для ряда групп запускается алгоритм локального поиска.

– *Глобальный линейный позиционный алгоритм (LPOCA)* [181]. В основе алгоритма реализуется кластеризация поверхности конечно-элементной модели на отдельные блоки-«параллелепипеды» со структурированной нумерацией, присваиваемой каждому узлу в виде атрибута. В дальнейшем производится проверка пересечения полученных кластеров, сокращая объем проверок.

– *Локальный пинболл-алгоритм* [127], [128]. Считается достаточно экономичным алгоритмом. Для каждого КЭ описывается сферическая окрестность (пинболл). Критерий «внедрения» определяется пересечением пинболлов: сравнивается расстояние между их центрами с суммой радиусов. При выполнении критерия к центрам пинболлов прикладываются силы пропорциональные «внедрению» с дальнейшим пересчетом в узлы элементов.

– *Локальный алгоритм функции зазора (GFA)* [154]. В основе алгоритма лежит вычисление скалярной функции зазора на предварительном этапе для каждого узла по отношению к ближайшей граничной поверхности (если отсутствует внедрение, то функция принимается равной нулю), на последующих этапах для деформированной модели происходит вычисление новых значений данной функции: Если она приобретает значение отличное от нуля, то происходит «внедрение» поверхности, величина которого и возникающая реакция пропорциональны полученному значению; а направление «выталкивания» определяется антиградиентом функции.

По окончанию обнаружения контактных зон и контактных пар становится необходимым определение нормальных контактных скоростей и усилий. С этой целью были разработаны ряд алгоритмов:

– *Алгоритм скольжения* [106], [199], [201], [200], [51]. Алгоритм основан на счете задачи двух контактирующих поверхностей с попеременным присвоением свойства жесткого тела одной из них. Стоит отметить, что получаемые контактные скорости и усилия при решении задачи будут иметь колеблющиеся значения, что, в конечном счете, влияет на точность решения.

– *Алгоритмы неупругого удара* представлены в работах [96], [97], [35], [55]. В их основе лежит корректировка скоростей лагранжевых узлов в зоне контакта, путем решения задачи неупругого соударения узловых масс, входящих в контактную пару либо «узел – ячейка», либо «узел – фиктивный узел».

– *Контактные алгоритмы метода множителей Лагранжа* [156], [158], [159], [188], [36], [38], [205], [20], [21], [123], [124]. В их основе лежит определение контактных нагрузок, учитываемых в выражениях контактных скоростей, исходя из условия непроникания. Для этого условия контактные нагрузки являются множителями Лагранжа. Отличия же современных трактовок данного подхода проявляется в различных методах учета непроникания контактирующих поверхностей.

– *Алгоритмы метода штрафных функций* [183], [132],[122], [56]. В основе алгоритма лежит пропорциональность контактных сил невязкам условий непроникания.

#### *1.1.6. Обзор методов решения задач с геометрической нелинейностью*

Впервые задача учета геометрической нелинейности возникла при расчете гибких нитей и стержней. В 1744 году Эйлер исследовал задачу о продольном изгибе стержня с помощью бесконечных рядов. В дальнейшем было получено уравнение кривой получаемой при загрузке цепи равномерной нагрузкой. Решение для гибкой нити в 1830 году получил Навье.

Расчетом стержней в геометрически нелинейной постановке занимались Крылов А. Н., Тимошенко С. П. [104]. Аналитические подходы получили развитие в работах Бондаря Н. Г. [17], Попова Е. П. [85]. Общая теория расчета и анализа гибких нитей предложена Качуриным Н. М. в работах [48],[49], теория расчета висячих комбинированных систем на основе матричных алгоритмов смешанного метода представлена в работах Петропавловского А. А. [80],[81].

Конечноразностный подход к решению гибких нитей применительно к анализу висячих мостов представлен в работах Смирнова В. А. [101]. В работе [98] представлен способ использования метода скорейшего спуска и обобщенного метода Ньютона-Рафсона к решению задач равновесия вантовых систем. Также методами расчета вантовых систем и гибких нитей занимались Ржаницын А. Р. [93], Светлицкий В. А. [99], Перельмутер А. В. [79].

Теория упругости с учетом геометрической нелинейности представлена в трудах Лурье А. И. [66], Гольденבלата И. И. [28], Новожилова В. В. [74],[73].

Задача нелинейного изгиба пластин представлена Бубновым в 1902 году при исследовании НДС бесконечно длинной пластины подверженной изгибу. По соотношениям между изгибными и мембранными напряжениями введена классификация пластины: жесткие, гибкие и абсолютно гибкие (мембраны). Проблематика оболочек и пластинок в геометрически нелинейной постановке рассматривается в работах Власова В. З. [24], Григолока Э. И. [33],[34], Вольмира А. С. [25]. Применение вариационно-разностных методов к расчету гибких пластин и оболочек рассмотрено в работе [22].

С развитием и ростом вычислительных мощностей для решения геометрических задач становится возможным применение метода конечных элементов. Постнов В. А. и Хархурим И. Я. [86] построили мгновенную матрицу жесткости для ферменного элемента и предложили использовать метод последовательных приближений для решения данного типа задач. Матрица жесткости для стержня с жесткими узлами представлена в [42]. В работе [84] предложен подход к расчету стержневых систем методом конечных элементов. Методы анализа вантовых систем и жестких нитей представлены в работах [54],[107].

В трудах [120], [133], [64] разработана матрица жесткости плоского стержневого элемента, работающего на изгиб. В [133] Кук Р. получил матрицу геометрической жесткости, исходя из энергетической теории.

В статье [180] Дж. Оден получил общие нелинейные уравнения для анализа трехмерных тел, испытывающих большие перемещения и конечные деформации. Систематизированное изложение метода конечных элементов и его применение к нелинейным задачам механики сплошных сред приведено в его монографии [76]. В [52],[53] представлены методы расчета мембранных и гибких комбинированных систем.

Разрешающие уравнения МКЭ для трехмерной задачи нелинейной теории упругости представлены в [31]. Методы расчета оболочек сложной формы с пошаговым нагружением и изменением геометрии предложены в [50]. Расчету пластин и оболочек посвящены работы [6],[57],[7].

В [131] рассматривается НДС жестко заделанной пластины под действием равномерно распределенной нагрузки с использованием конечных элементов с 20-ю степенями свободы. Методика расчета пластин с использованием модифицированной матрицы жесткости представлена в [175].

Задача изгиба пластин с начальной погибью и анализ упругого прощелкивания рассматривается в [109],[108].

Систематизированные подходы к расчету пластин и оболочек методом конечных элементов в геометрически нелинейной постановке приведены в работе [40].

## **1.2. Обзор численных методов и программных комплексов численного моделирования деформирования и разрушения конструкций**

Мощные численные методы механики, развитые в последние годы, пришедшие на смену стержневым и конечноразностным дискретизациям краевых задач, прежде всего – метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ) – позволяют выполнять огромный комплекс задач численного моделирования в самых различных областях.

Огромное число современных «промышленных» комплексов, построенных на базе МКЭ, сочетают в себе инструменты для решения пространственных задач, как в статической, так и динамической постановке.

Метод конечных элементов (finite element method) [40],[41], относится к вариационным методам. Его математические основы были впервые сформулированы Р. Курантом в 1943г. [135], а термин «конечный элемент» впервые был введен Р. Клафом в 1960 г. Метод основан на идее аппроксимации непрерывной функции дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей, называемых конечными элементами. Исследуемая геометрическая область разбивается на элементы таким образом, чтобы на каждом из них неизвестная функция аппроксимировалась некой функцией (как правило, полиномом). Эти функции должны удовлетворять граничным условиям непрерывности, совпадающим с граничными условиями, налагаемыми самой задачей. Выбор для каждого элемента аппроксимирующей функции будет определять соответствующий тип элемента.

Стоит отметить, что современные реализации МГЭ имеют некоторые преимущества перед МКЭ для статического расчета массивных систем; однако МКЭ сохранил свои лидирующие позиции при комплексном анализе комбинированных систем, включающих стержневые, плитно-оболочечные и объемные фрагменты.

Чаще всего практические и научные расчеты выполняются с использованием программных систем «промышленного» типа (программные комплексы ANSYS, ABAQUS, MSC.NASTRAN), хотя известны примеры, когда применяются разовые разработки, специально создаваемые «под задачу». На постсоветском пространстве были созданы такие программные комплексы, как СТАДИО, ЛИРА, СКАД.

К настоящему времени разработаны сотни типов и «семейств» конечных элементов, моделирующих геометрико-жесткостные, инерционные, диссипа-



тивные и нагрузочные характеристики и напряженно-деформированное состояние реальных подсистем в плоской, осесимметричной и трехмерной постановках. «Джентльменский» набор продвинутых программных комплексов включает, как правило, прямо- и криволинейные стержневые, двумерные (плоское напряженное, плоское деформированное и осесимметричное состояния), тонко-, средне- и толстостенные одно- и многослойные плитные и оболочечные постоянной и переменной толщины, трехмерные конечные элементы. Элементы изопараметрического семейства со «сдвинутыми» промежуточными узлами на сторонах (гранях) позволяют, в частности, описать НДС в зоне трещины без привлечения специальных сингулярных КЭ и вычислить коэффициенты интенсивности напряжений – параметры, определяющие рост или стабилизацию трещин в рамках концепции линейной механики разрушения.

Начиная с 80-х годов, в связи с возрастающей необходимостью расчета задач нелинейного динамического деформирования и разрушения конструкций, начинают активно развиваться численные методы решения задач нелинейной динамики. Параллельно развиваются два подхода решения динамических задач с интегрированием по времени: явная и неявная схемы интегрирования. Наиболее востребованными программными кодами с неявной схемой интегрирования стали LS-DYNA, AUTODYN и ABAQUS/Explicit. Указанные комплексы имеют достаточно представительный набор КЭ, моделей деформирования материалов и критериев разрушения, реализуют решение как в лагранжевом пространстве, так и в эйлеровом и произвольном эйлерово-лагранжевом.

В последние годы параллельно с МКЭ получил развитие метод прикладных элементов (Applied Element Method) [117]. В методе АЕМ принимается концепция дискретного растрескивания и связи конечных элементов через пружины на каждую степень свободы, что позволяет автоматически отслеживать разрушение конструкции, проходя через все стадии работы материала: упругая, образование трещин и их распространения при растяжении, текучесть в

арматуре, разделения элементов и возникновение контакта, а также столкновение с землей и смежными конструкциями.

В таблице 1.4 представлено сравнение программных комплексов по реализуемым в них типам расчетов.

Таблица 1.4. Сравнительная таблица программных комплексов

Наименование комплекса	Статика	Динамика (схемы интегр. по времени)		Физ. нелин.	Геом. нелин.	Конструк. нелин.	Генетич. нелин.***
		Неявная схема	Явная схема				
Иностранные							
ANSYS [116][115][114]	+	+	-	+	+	+	+
ABAQUS [151][152]	+	+	-	+	+	+	+
NASRAN [174][173]	+	+	-	+	+	+	+
Code_Aster* [169]	+	+	-	+	+	+	н.д.
Calculix*[146]	+	+	-	+	+	+	-
LS-DYNA [158][159]	***	***	+	+	+	+	+
AUTODYN[119]	-	-	+	+	+	+	н.д.
ABAQUS/Explicit[153]	-	-	+	+	+	+	н.д.
Impact*	-	-	+	+	+	+	-
Extreme Loading for Structures (AEM) [118]	-	+	-	+	+	+	-

Наименование комплекса	Статика	Динамика (схемы интегр. по времени)		Физ. нелин.	Геом. нелин.	Конструк. нелин.	Генетич. нелин.***
		Неявная схема	Явная схема				
Россия, Украина, Белоруссия и другие страны СНГ							
ЛИРА [30]	+	+	–	+	+	–	+
SCAD [47]	+	+	–	–	+	–	+
СтаДиО [16]	+	+	–	+	+	–	+

\* – «свободно распространяемые» программные комплексы

\*\* – неявная схема интегрирования применяется для КЭ «явного» типа

\*\*\* – реализация этапности возведения и демонтажа конструкций

н.д. – нет данных

### 1.3. Современная практика анализа и моделирования процессов разрушения и обрушения конструкций зданий и сооружений

Обрушения ряда объектов, таких как здание Ronan Point (Лондон, Англия; 1968 г), арена Хартфорд (Хартфорд, США, 1978), арена Кемпер (Канзас, США, 1981), Всемирный торговый центр (Нью-Йорк, США, 2001), СОК «Трансвааль-парк» (Москва, 2004), стали в какой-то мере отправными точками в практике расчетов на прогрессирующее обрушение и моделирования деформирования и разрушения конструкций.

После обрушения здания *Ronan Point* появились изменения в нормативной базе Англии – в ноябре 1968 г. были изданы стандарты [189]. Были зафиксированы термины: альтернативный путь нагрузки, сплошность и случайная нагрузка.

В 1972 г. термин «прогрессирующее обрушение» был впервые отображен в нормах США [112] (впоследствии дополнены в [113]). В «результате» попадания самолетов в башни *Всемирного торгового центра* в Нью-Йорке были разработаны [110], [195], [145]. Изменения были внесены также и в европейские нормы Eurocodes-1 [138].

В отечественной нормативной литературе необходимость анализа конструкций на аварийные разрушающие воздействия возникла с введением в действие ГОСТ 27751-88 [32], предписывающим проведение расчета на отказ любого элемента конструкции. Однако документ не регламентировал ни методы исследования, ни их объемы. В 1999 году совместными усилиями МНИИТЭП и НИЦ СтаДиО разработаны рекомендации [92] по предотвращению прогрессирующего обрушения крупнопанельных зданий.

В последующие годы «на волне» от трагического обрушения СОК «Трансвааль-парк» были выпущены рекомендации [88], [89], [90], [91], одним из основных требований которых стал расчет сооружений на аварийные воздействия в виде удаления конструктивного элемента с учетом геометрической и физической нелинейностей с помощью метода конечных элементов:

Практика численного моделирования процессов и анализов причин разрушения и обрушения зданий и сооружений в силу своей специфики является достаточно ограниченной и развивается по большей части в последние годы.

В зарубежной практике наиболее значимым исследованием стал анализ причин обрушения *Всемирного торгового центра* (WTC), выполненный Национальным институтом стандартов и технологий (NIST) в период с 2002 по 2005 г. [178], [179], [177]. При этом публикация дополнений к расчету и ответы на поступающие вопросы по моделированию производились вплоть до 2010 г.

В Российской практике исследование подобного уровня производилось в рамках всестороннего исследования причин обрушения СОК Трансвааль-Парк, выполненного ЗАО НИЦ СтаДиО на базе программных продуктов ANSYS, ANSYS/FLOTRAN, ANSYS/CFX, ABAQUS, ПК СтаДиО, ПК ЛИРА 9.0, SCAD 7.31 R5. Интегральные результаты экспертизы были опубликованы в [4].

Тема моделирования прогрессирующего обрушения конструкций кроме того фигурирует в работах Г. Бланкерхорна (G. Blankenhorn) и С. Маттерна (S. Mattern) из института механики в Карлсруэ [140], [142], [141]. За основу для численного моделирования был принят контролируемый снос с опрокидыванием на бок промышленного сооружения (сносились шесть железобетонных колонн) в городе Борн (Германия), проведенный в 2000 году.

Применение метода АЕМ для моделирования процессов обрушения рассмотрено в работах Н. Рамана (N.A. Rahman), А. Элфоули (A.Elfouly), М. Бута (M.Booth) [176] и М. Люпэ (M. Lupoae), К. Бюкюр (C. Bucur) [170]. В первом случае производилась оценка устойчивости к обрушению пятиэтажного металлического сооружения, а во втором – снос семиэтажного каркасного здания.

За последние годы заметный вклад в развитие темы моделирования обрушения сооружений в результате сейсмических и аварийных воздействий нелинейными динамическими методами был внесен О. В. Мкртычевым в работах [71], [70].

### **Выводы по главе 1:**

1. Из обзора современных отечественных и зарубежных разработок и исследований следует, что существующие методики расчета деформирования, локальных разрушений и прогрессирующего обрушения большепролетных конструкций нуждаются в дополнении и уточнении, особенно в части учета развитого нелинейного и быстропротекающего характера процессов.

2. Основываясь на проведенном исследовании, можно утверждать, что применение современных моделей деформирования и разрушения материа-

лов требует использования расширенного и унифицированного набора исследуемых динамических параметров материалов.

3. Существующие «промышленные» программные комплексы, основанные на разработках ведущих ученых в областях геометрической, физической и конструктивной нелинейностей, позволяют на качественном уровне решать задачи нелинейного деформирования и разрушения конструкций.

## **ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ СООРУЖЕНИЙ. ВЫБОР МЕТОДОВ И СПОСОБОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ.**

### **2.1. Постановка задачи численного моделирования процессов деформирования и разрушения**

В рамках данной работы рассматриваются вопросы использования и применения современных численных методов и программных комплексов их реализующих, к задачам расчета конструкций большепролетных сооружений с учетом физической, геометрической и конструктивной нелинейностями в динамической и квазистатической постановке. В соответствии с темой работы были определены следующие задачи:

1. Разработка методики моделирования процессов деформирования и разрушения как всей конструкции в целом, так и отдельных узлов.

2. Выбор метода решения квазистатических и динамических задач с развитыми нелинейностями (геометрической, физической и конструктивной).

3. Верификация разработанной методики на представительном наборе квазистатических и динамических задач с развитыми эффектами физической, геометрической и конструктивной нелинейностей.

4. Разработка проблемно-ориентированного для строительной области программного модуля, автоматизирующего проведение вычислительных экспериментов с формированием полного программного кода для входного файла расчетного процессора и картин визуализации для постпроцессора.

5. «Ретроспективное» исследование напряженно-деформированного состояния, устойчивости и механизмов разрушения наиболее нагруженных узлов и обрушения конструкций покрытия СОК «Трансвааль-парк» по разработанной методике.

## 2.2. Методика решения задач деформирования и разрушения конструкций

Процесс деформирования и разрушения конструкций большепролетных сооружений можно разделить на ряд этапов (см. рис. 2.1).

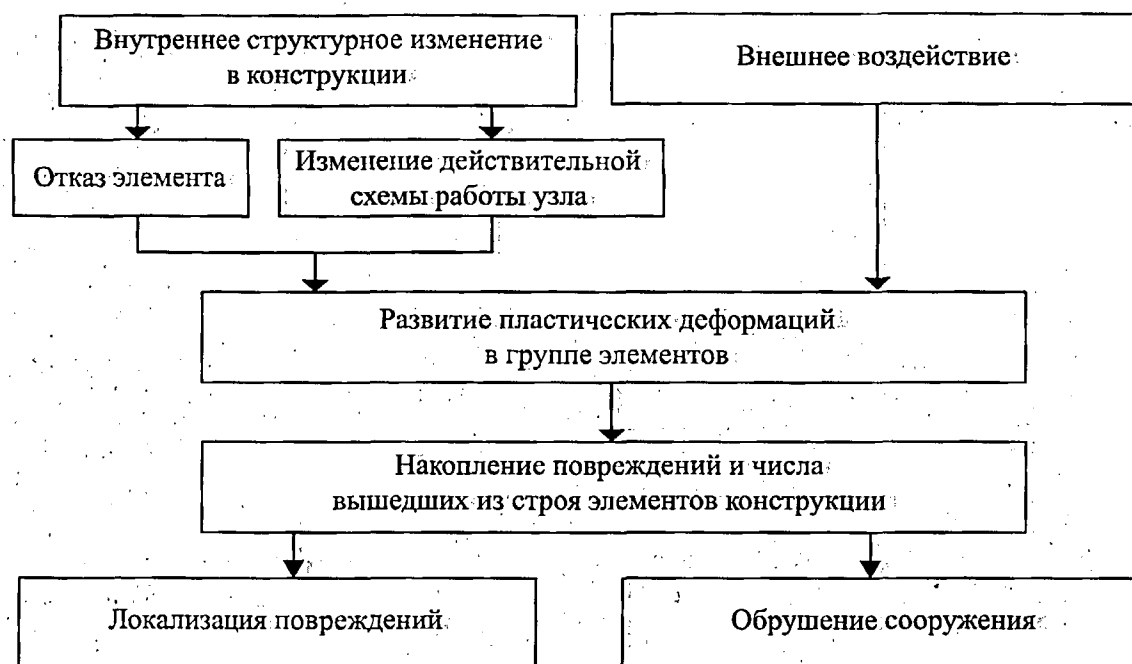


Рисунок 2.1. Схема развития аварийной ситуации

Изначально в результате внутреннего структурного изменения (отказ элемента или изменение его схемы работы) в конструкции начинается процесс изменения режима работы групп элементов с нормального на закритический. Данный процесс сопровождается развитием пластических деформаций и (в зависимости от свойств материала и времени протекания процесса) накоплением повреждений. В дальнейшем реализуются два сценария: либо происходит накопление «критической массы» поврежденных и вышедших из строя элементов, при которой происходит обрушение сооружения, либо происходит локализация повреждений без дальнейшего затрагивания смежных зон конструкции.

С этой точки зрения численное моделирование процесса деформирования и разрушения большепролетных сооружений, оценки общей устойчиво-



сти и восприимчивости к структурным изменениям, представляется задачей прохождения каждого из этапов развития аварийной ситуации по приведенной схеме (см. рис. 2.1).

Методику проведения численного моделирования и анализа сложившейся ситуации можно представить в следующем виде (см. рис. 2.2):

- Оценка жесткостных характеристик, действительных схем работы и остаточных ресурсов несущей способности конструктивных узлов при мгновенном и длительном типах нагружения в условиях нормального режима эксплуатации

- Оценка изменения схемы работы и жесткостных характеристик конструктивных узлов при воздействии повышенных нагрузок и развитии пластических деформаций вплоть до выхода из строя

- Оценка влияния выявленных схем работы узлов на локальные зоны конструкции

- Оценка отклика сооружения на введение возможных выявленных конструктивных изменений

Процессы деформирования, разрушения и обрушения конструкций сооружений по своей сути являются развитыми сильно нелинейными процессами, сопровождающимися большими пластическими деформациями и перемещениями, контактным взаимодействием между группами элементов, динамическими нагружающими эффектами в момент отказа элементов конструкций.

В свете этого результаты комплексного численного моделирования существенно зависят от применяемых методов решения составляющих задач:

- Нелинейные динамические задачи
- Геометрически нелинейные задачи с большими перемещениями
- Геометрически нелинейные задачи с большими деформациями
- Физически нелинейные задачи с развитой пластикой и накоплением повреждений материалом

- Задачи контактного взаимодействия различных групп элементов конструкций, в том числе и «самоконтакт»

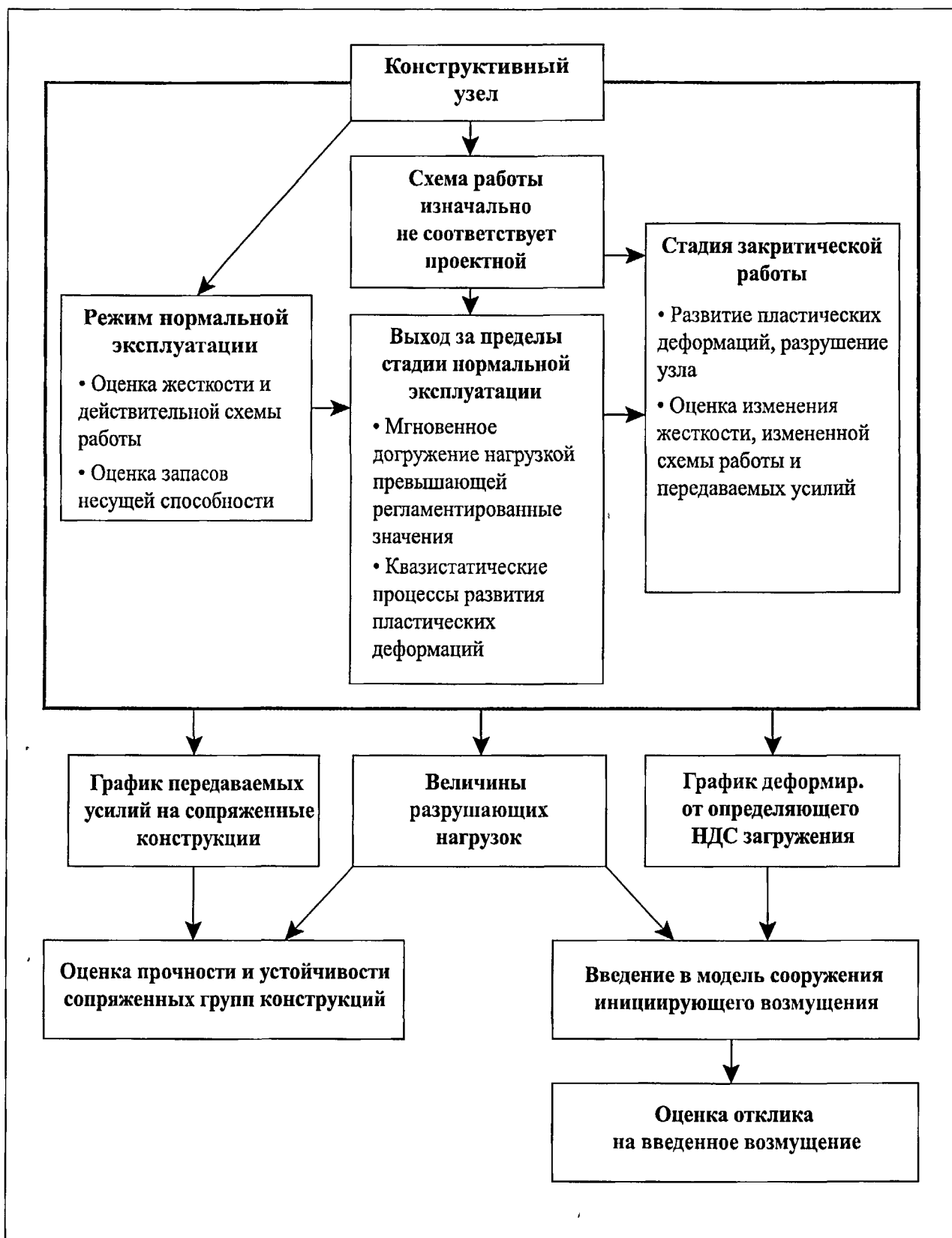


Рисунок 2.2. Схема проведения численного эксперимента

## 2.3. Выбор численного метода решения нелинейных динамических задач деформирования и разрушения конструкций

2.3.1. Задача численного моделирования процессов деформирования и разрушения конструкций большепролетных сооружений представляется в виде динамического развивающегося во времени процесса деформирования с развитыми нелинейностями (физическая, геометрическая и конструктивная), сопровождаемого разрушением элементов конструкций. Вследствие этого становится невозможным применение принципа независимости действия сил, поэтому приходится последовательно, шаг за шагом, загружать конструкцию и всякий раз фиксировать изменение ее формы и способность измененной структуры быть устойчивой, а также воспринимать новую «порцию» нагрузок.

2.2.2. Анализ динамических задач основывается на решении уравнения равновесия системы конечных элементов в момент времени  $t$ , находящейся в состоянии движения:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{R\} \quad (2.1)$$

где  $[M], [C], [K]$  – матрицы масс, демпфирования, жесткости,  $\{R\}$  – вектор внешней узловой нагрузки,  $\{\ddot{u}\}, \{\dot{u}\}, \{u\}$  – вектора ускорений, скоростей и перемещений узлов элементов.

Систему уравнений (2.1) так же можно записать в следующей форме:

$$\{F_I(t)\} + \{F_D(t)\} + \{F_E(t)\} = \{R(t)\} \quad (2.2)$$

где  $\{F_I(t)\} = [M]\{\ddot{u}\}$  – вектор сил инерции,  $\{F_D(t)\} = [C]\{\dot{u}\}$  – вектор сил демпфирования,  $\{F_E(t)\} = [K]\{u\}$  – вектор сил упругости.

Решение системы (2.1) реализуется с помощью ряда методов, подразделяемых на две группы:

- Методы разложения по собственным формам (применяются в линейных и квазилинейных задачах)

• Методы прямого интегрирования:

- Хоболта
- $\theta$ -метод Уилсона
- Ньюмарка
- Центральных разностей

По виду схемы интегрирования данные методы можно разделить на явную (метод центральных разностей) и неявную (Хоболта,  $\theta$ -метод Уилсона, Ньюмарка).

2.2.3. Методы прямого интегрирования (неявные схемы)

*Метод Хоболта.* Для интегрирования уравнения (2.1) используется конечно-разностный подход выражения в перемещениях:

$$\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\} = \frac{1}{\Delta t^2} (2\{u_{t+\Delta t}\} - 5\{u_t\} + 4\{u_{t-\Delta t}\} - \{u_{t-2\Delta t}\}) \quad (2.3)$$

$$\{\dot{u}_{t+\Delta t}\} = \frac{1}{6\Delta t} (11\{u_{t+\Delta t}\} - 18\{u_t\} + 9\{u_{t-\Delta t}\} - 2\{u_{t-2\Delta t}\}) \quad (2.4)$$

Разрешающее уравнение примет следующий вид в момент времени  $t + \Delta t$

$$[M]\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\} + [C]\{\dot{u}_{t+\Delta t}\} + [K]\{u_{t+\Delta t}\} = \{R_{t+\Delta t}\} \quad (2.5)$$

Подставляя (2.3) и (2.4) в (2.5) получаем решение  $\{u_{t+\Delta t}\}$  в момент времени  $t + \Delta t$

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{\Delta t^2}[M] + \frac{11}{6\Delta t}[C] + [K] \right) \{u_{t+\Delta t}\} = & \{R_{t+\Delta t}\} + \left( \frac{5}{\Delta t^2}[M] + \frac{3}{\Delta t}[M] \right) \{u_t\} - \\ & - \left( \frac{4}{\Delta t^2}[M] + \frac{3}{2\Delta t}[C] \right) \{u_{t-\Delta t}\} + \left( \frac{1}{\Delta t^2}[M] + \frac{1}{3\Delta t}[C] \right) \{u_{t-2\Delta t}\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для вычисления  $\{u_{t+\Delta t}\}$  данным методом требуются  $\{u_t\}$ ,  $\{u_{t-\Delta t}\}$ ,  $\{u_{t-2\Delta t}\}$ , что означает необходимость вычисления  $\{u_{\Delta t}\}$ ,  $\{u_{2\Delta t}\}$  каким-либо другим методом.

*θ-метод Вилсона.* При данном подходе ускорения принимаются линейно изменяющимися во временном интервале  $t \dots t + \Delta t$ . Обозначим через  $\tau$  приращение времени, где  $0 \leq \tau \leq \theta \Delta t$ , тогда для временного интервала от  $t$  до  $t + \theta \Delta t$

$$\{\ddot{u}_{t+\tau}\} = \{\ddot{u}_t\} + \frac{\tau}{\theta \Delta t} (\{\ddot{u}_{t+\theta \Delta t}\} - \{\ddot{u}_t\}) \quad (2.7)$$

Интегрируя (2.7) имеем для  $\tau = t + \theta \Delta t$

$$\{\dot{u}_{t+\tau}\} = \{\dot{u}_t\} + \frac{\tau^2}{2\theta \Delta t} (\{\ddot{u}_{t+\theta \Delta t}\} - \{\ddot{u}_t\}) \quad (2.8)$$

$$\{u_{t+\tau}\} = \{u_t\} + \tau \{\dot{u}_t\} + \frac{1}{2} \tau^2 \{\ddot{u}_t\} + \frac{1}{6\theta \Delta t} \tau^3 (\{\ddot{u}_{t+\theta \Delta t}\} - \{\ddot{u}_t\}) \quad (2.9)$$

Выражение (2.9) для момента времени  $t + \theta \Delta t$  имеет следующий вид

$$\{u_{t+\theta \Delta t}\} = \{u_t\} + \theta \Delta t \{\dot{u}_t\} + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} (\{\ddot{u}_{t+\theta \Delta t}\} + 2\{\ddot{u}_t\}) \quad (2.10)$$

Отсюда выражения для  $\{\ddot{u}_{t+\theta \Delta t}\}, \{\dot{u}_{t+\theta \Delta t}\}$  примут следующий вид

$$\{\ddot{u}_{t+\theta \Delta t}\} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (\{u_{t+\theta \Delta t}\} - \{u_t\}) - \frac{6}{\theta \Delta t} \{\dot{u}_t\} - 2\{\ddot{u}_t\} \quad (2.11)$$

$$\{\dot{u}_{t+\theta \Delta t}\} = \frac{3}{\theta \Delta t} (\{u_{t+\theta \Delta t}\} - \{u_t\}) - 2\{\dot{u}_t\} - \frac{\theta \Delta t}{2} \{\ddot{u}_t\} \quad (2.12)$$

Для вычисления перемещений, скоростей и ускорений в момент времени  $t + \Delta t$  уравнение (2.1) рассматривают в момент времени  $t + \theta \Delta t$ . С учетом того, что принимается линейное изменение ускорения, то вектор нагрузки также предполагается линейно меняющимся

$$[M]\{\ddot{u}_{t+\theta \Delta t}\} + [C]\{\dot{u}_{t+\theta \Delta t}\} + [K]\{u_{t+\theta \Delta t}\} = \{R_{t+\theta \Delta t}\} \quad (2.13)$$

$$\{R_{t+\theta \Delta t}\} = \{R_t\} + \theta (\{R_{t+\Delta t}\} - \{R_t\}) \quad (2.14)$$

*Метод Ньюмарка.* Аналогично методу  $\theta$ -Вилсона изменение ускорения принимается линейным. Вектора перемещений и скоростей вычисляются следующим образом

$$\{\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{\mathbf{u}}_t\} + \left[ (1-\delta)\{\ddot{\mathbf{u}}_t\} + \delta\{\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\} \right] \Delta t \quad (2.15)$$

$$\{\mathbf{u}_{t+\Delta t}\} = \{\mathbf{u}_t\} + \Delta t\{\dot{\mathbf{u}}_t\} + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{\mathbf{u}}_t\} + \alpha \{\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\} \right] \quad (2.16)$$

где  $\alpha, \delta$  – параметры определяющие точность и устойчивость интегрирования. Рекомендуемые Ньюмарком параметры  $\alpha = \frac{1}{4}, \delta = \frac{1}{2}$

Для вычисления перемещений, скоростей и ускорений в момент  $t + \Delta t$  рассматриваются уравнения равновесия для момента  $t + \Delta t$

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}_{t+\Delta t}\} = \{\mathbf{R}_{t+\Delta t}\} \quad (2.17)$$

Выражая  $\{\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\}$  из (2.16) через  $\{\mathbf{u}_{t+\Delta t}\}$  и подставляя  $\{\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\}$  в (2.17), получаем уравнение для вычисления  $\{\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\}, \{\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\}$  через неизвестный вектор перемещений  $\{\mathbf{u}_{t+\Delta t}\}$ . Выражения для  $\{\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\}$  и  $\{\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\}$  подставляются в (2.17) для нахождения  $\{\mathbf{u}_{t+\Delta t}\}$ , после чего можно определить  $\{\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\}, \{\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\}$ , используя (2.15) и (2.16)

*Учет нелинейностей* при использовании методов прямого интегрирования, основанных на неявных схемах, приводит уравнение равновесия (2.1) к следующему виду:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}^i\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}^i\} + [\mathbf{K}]_t^i \{\Delta \mathbf{u}^i\} = \{\mathbf{R}_{t+\Delta t}\} - \{\mathbf{F}_{t+\Delta t}^{i-1}\} \quad (2.18)$$

Перемещение на шаге  $i$  для момента времени  $t + \Delta t$  определяется следующим образом

$$\{\mathbf{u}_{t+\Delta t}^i\} = \{\mathbf{u}_{t+\Delta t}^{i-1}\} + \{\Delta \mathbf{u}^i\} \quad (2.19)$$

Система (2.18) посредством известных математических преобразований сводится к виду

$$[\hat{K}]_t \{\Delta u^i\} = \{\hat{R}\}_{t+\Delta t}^{i-1} \quad (2.20)$$

где  $[\hat{K}]_t$  – эффективная матрица жесткости

$\{\hat{R}\}_{t+\Delta t}$  – эффективный вектор нагрузки

Решение системы уравнений производится с помощью классического и модифицированного методов Ньютона-Рафсона.

#### 2.2.4. Методы прямого интегрирования по времени (явные схемы)

• *Метод центральных разностей* относится к явным схемам интегрирования по времени.

Уравнение равновесия (2.1) будет иметь следующий вид для  $n$ -ого шага по времени

$$[M]\{\ddot{u}_n\} + [C]\{\dot{u}_{n-1/2}\} = \{R_n\} - \{F_n\} \quad (2.21)$$

где  $n$  – номер шага

$\{F_n\}$  – вектор внутренних сил в момент времени  $t$  (для линейных задач  $\{F_n\} = [K]\{u_n\}$ ). Учет всех типов нелинейностей (геометрическая, физическая, конструктивная) производится в данном векторе.

Схема метода центральных разностей представлена на рисунке 2.3. Вектора перемещений и ускорений вычисляются на каждом шаге  $t_1, \dots, t_{n-1}, t_n, \dots, t_f$  ( $t_f$  – последний шаг по времени), вектор скоростей вычисляется в моментах времени  $t_{1/2}, \dots, t_{n-1/2}, t_{n+1/2}, \dots, t_{f-1/2}$ . Счет начинается с начальных значений ускорений и перемещений в момент  $t_0$ , при этом высчитываются значения скоростей для момента времени  $t_{-1/2}$ . Решение наращивается через уравнения центральных разностей.

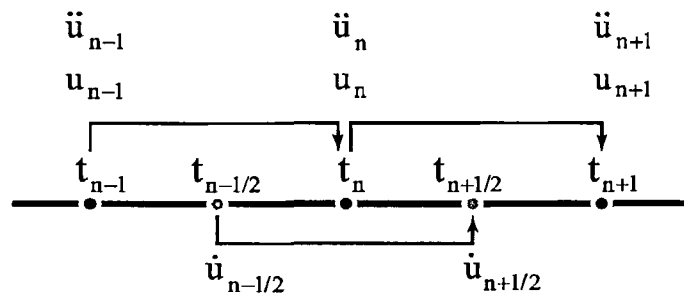


Рисунок 2.3. Схема метода центральных разностей при решении нелинейных задач динамики

Значения ускорений  $\ddot{u}_n$  получаются

$$\{\ddot{u}_n\} = [M]^{-1} (\{R_n\} - \{F_n\} - [C]\{\dot{u}_{n-1/2}\}) \quad (2.22)$$

Векторы скоростей и перемещений на каждом шаге обновляются следующим образом:

$$\{\dot{u}_{n+1/2}\} = \{\dot{u}_{n-1/2}\} + \{\ddot{u}_n\} \Delta t_n \quad (2.23)$$

$$\{u_{n+1}\} = \{u_n\} + \{\dot{u}_{n+1/2}\} \Delta t_{n+1/2} \quad (2.24)$$

где

$$\Delta t_{n+1/2} = \frac{1}{2} (\Delta t_n + \Delta t_{n+1}) \quad (2.24)$$

Обновление геометрии производится следующим образом

$$\{x_{n+1}\} = \{x_0\} + \{u_{n+1}\} \quad (2.26)$$

Алгоритм счета с применением метода центральных разностей представлен на рисунке 2.4.

Важным аспектом при решении задачи с использованием данного метода интегрирования является обеспечение устойчивости счета на основании выполнения условия минимального шага интегрирования по времени – критерия Куранта. В общей формулировке величина критического шага для обеспечения устойчивости счета вычисляется следующим образом



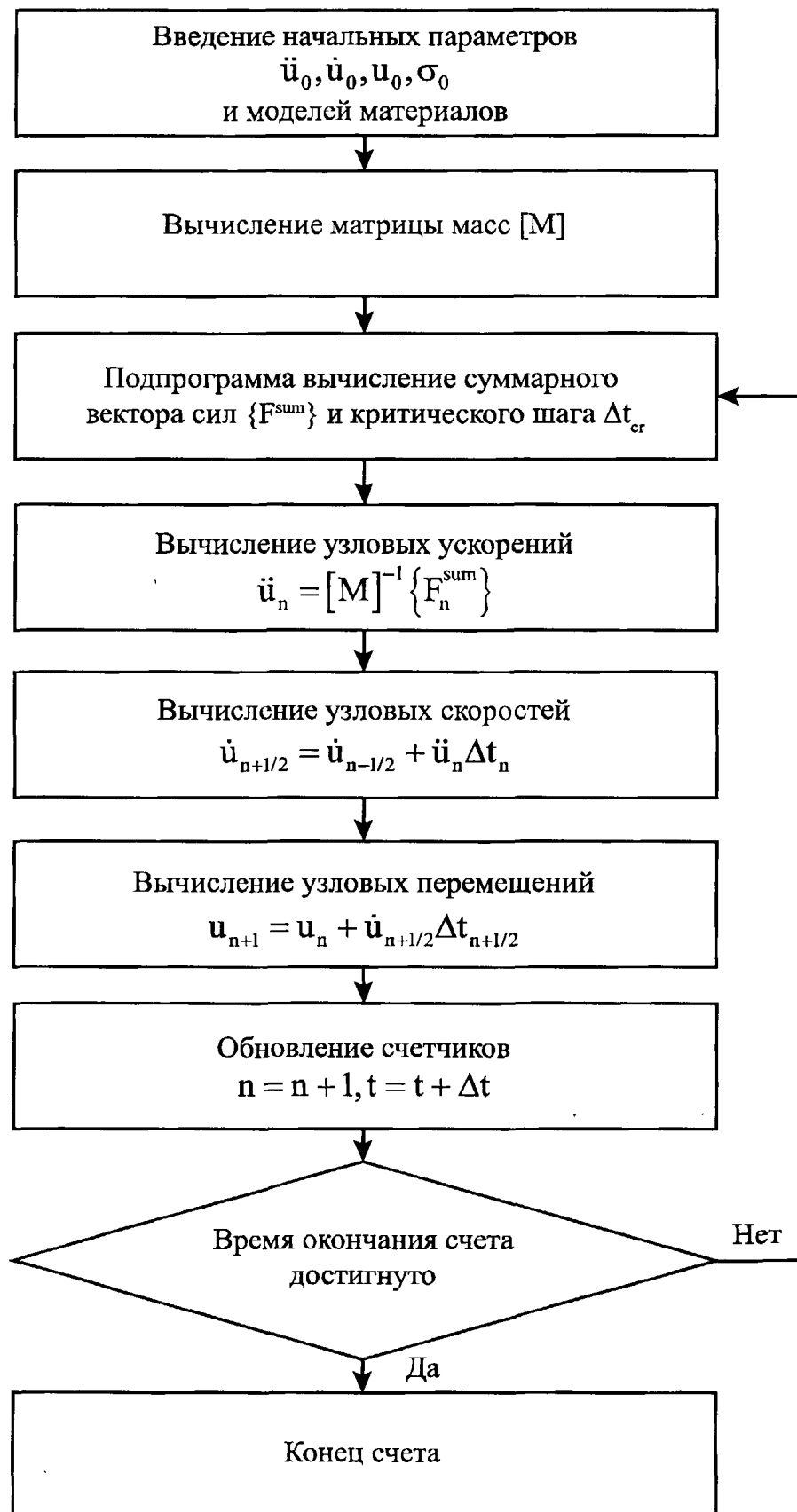


Рисунок 2.4. Алгоритм счета задач с применением метода центральных разностей

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}} \left( \sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right) \quad (2.27)$$

где  $\Delta t_{cr}$  – критический шаг по времени,  $\omega_{max}$  – максимальная собственная частота системы (рад/с),  $\xi$  – коэффициент.

Решение системы уравнений методом центральных разностей сопряжено с введением ряда упрощений:

- Возможно использование только элементов первого порядка
- Использование диагональной матрицы масс  $[M]$

Основные причины применения данного подхода заключаются, во-первых, в увеличении объема математических операций на один круг, связанном с необходимостью обращения согласованной матрицы масс, снижением основных периодов собственных колебаний при использовании элементов второго порядка и уменьшением величины критического шага  $\Delta t_{cr}$ .

Согласно [157], использование диагональных матриц масс  $[M]$  приводит к росту основных периодов собственных колебаний по сравнению с аналитическими моделями, в то время как применение метода центральных разностей приводит к уменьшению и уравниванию их значений.

Основной недостаток данного метода – выбор размера шага  $\Delta t$ . Минимальный критический шаг для элемента в общей форме определяется по (2.27). На следующем этапе размер шага выбирается из условия минимального по всем элементам в модели

$$\Delta t_{cnt} = \min(\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n) \quad (2.28)$$

При наличии в диагональной матрице масс элемента значительно меньшего порядка по сравнению с остальными, происходит значительное снижение периода собственных колебаний и, как следствие, снижение низшего периода колебаний. Это сказывается на резком уменьшении  $\Delta t_{cr}$ . Порядок же системы остается достаточно высоким и влияние на динамическую реакцию

данный элемент почти не оказывает. В результате этого затраты вычислительных ресурсов будут неоправданно высокими.

### *2.2.5. Алгоритмы решения геометрически нелинейных задач*

Как уже отмечалось выше, деформирование и разрушение конструкций большепролетных сооружений представляют собой сильно нелинейный процесс, включающий в себя геометрическую, физическую и конструктивную нелинейности.

Процесс анализа деформирования данного вида сооружений в режиме нормальной эксплуатации (с учетом соблюдения норм проектирования) представляет собой исследование системы либо с малыми перемещениями и малыми деформациями, либо с большими перемещениями и малыми деформациями. При этом для исследуемой в данной работе стадии закритического поведения конструкций (локальная и общая потеря устойчивости, сопровождаемая разрушением элементов конструкций) и момента перехода в нее характерно наличие больших перемещений, развитие больших пластических деформаций в ряде элементов, как на коротком временном промежутке, так и длительном (процесс накопления повреждений).

В этом свете, важным пунктом получения адекватного напряженно-деформированного состояния становится выбор формулировки решения геометрически нелинейных задач с большими перемещениями и деформациями.

Данные формулировки можно разделить на два типа по моменту времени захвата опорной геометрии конструкции:

- *Полная лагранжева формулировка (Total Lagrangian formulation – TL).* В качестве опорной геометрии модели на протяжении всего расчета используется начальная геометрия.

В основе формулировки лежит взаимосвязь второго тензора напряжений Пиола—Кирхгофа с тензором деформаций Грина. В работе [150] впервые была предложена формулировка больших деформации/больших перемещений применительно к методу конечных элементов.

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (2.29)$$

где  $S_{ij}$  – компонент второго тензора напряжений Пиола—Кирхгофа

$E_{kl}$  – компонент тензора деформаций Грина

$C_{ijkl}$  – компоненты тензора состояния

• *Обновляемая лагранжева формулировка (UpdatedLagrangianformulation – UL)*. В качестве опорной геометрии модели на протяжении всего расчета используется геометрия, полученная на предыдущем шаге. Обновляемую лагранжеву формулировку в зависимости от величины деформаций можно разделить на два типа:

– *большие перемещения/малые деформации*

Используется связь тензоров напряжений Коши и тензора малых деформаций Альманси и их компонент  $\sigma_{ij}$  и  $e_{kl}$ , соответственно

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (2.30)$$

где  $C_{ijkl}$  – компонент связующего тензора состояния

– *большие перемещения/большие деформации*

Различают два типа UL-формулировок реализующих большие перемещения/большие деформации:

• *Обновляемая лагранжево-генки формулировка (UpdatedLagrangianHenckyformulation – ULH)*.

$$\sigma_{ij} = (R_{*,kl}^E)^T \bar{\sigma}_{ij}(\lambda) R_{*,kl}^E \quad (2.31)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений Коши

$\bar{\sigma}_{ij}(\lambda)$  – компоненты функции зависимости напряжение от величины растяжения  $\lambda$

$R_{*,kl}^E$  – компоненты опорного поворотного тензора

• *Обновляемая лагранжево-яуманова формулировка (UpdatedLagrangianJaumannformulation – ULJ)*. Формулировка основана на примене-

нии тензора скоростей нарастания напряжений Яуманна для выражения связи «напряжения-деформации»

$$\sigma_{ij}^{\nabla} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.32)$$

где  $\sigma_{ij}^{\nabla}$  – компоненты тензора скоростей нарастания напряжений Яуманна

$C_{ijkl}$  – компоненты тензора состояния;

$\dot{\epsilon}_{kl}$  – компоненты тензора скоростей деформаций

*Сопоставление формулировок:*

TL-формулировка применяется для случаев, решение которых не зависит от истории нагружения тела.

История нагружений может быть важна в ряде случаев:

- изучение напряженно-деформированного состояния потерявших устойчивость конструкций или их элементов (локальная потеря устойчивости, «процелкивание»);
- при сложном нагружении с одновременным развитием процессов упругопластических деформаций и упругой разгрузки
- при значительных деформациях, когда теоретически нельзя складывать деформации, а можно складывать только скорости деформаций.

Решение задачи с помощью UL-формулировок накладывает ограничение в виде необходимости плавности прохождения процесса с использованием небольших шагов по времени.

Отсюда следует, что для случаев, когда отсутствуют пластические деформации и история нагружения не так важна, применение полной лагранжевой формулировки (TL-формулировки) является более эффективным, в остальных случаях семейство обновляемых лагранжевых формулировок (ULx-формулировки) является более эффективным способом проведения расчета.

При больших одинаковых размерах шагов по времени ULH-формулировка по сравнению с ULJ-формулировкой дает более точное реше-

ние. Однако с уменьшением размера шага разница в результатах нивелируется. При этом затраты операций на решение одного цикла с помощью ULJ-формулировки значительно меньше. Отсюда следует, что применение обновляемой лагранжево-генки формулировки (ULH) эффективно при решении задач методами прямого интегрирования с применением неявных схем для средних размеров шагов. При применении явных и неявных схем интегрирования с малыми шагами по времени использование обновляемой лагранжево-яумановой формулировки более эффективно.

### 2.2.6. Физическая нелинейность

Любой закон, описывающий поведение материала, можно представить в виде(1.19), а при учете введения различных параметров в форме

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i^p, \dot{\varepsilon}_i^p, T, K_1, \dots, K_n) \quad (2.33)$$

Поскольку одним из основных материалов при конструировании большепролетных сооружений являются металлы, то рассмотрим общие аспекты их моделирования.

В общей формулировке для изотропного и кинематического упрочнения функция текучести определяется следующим образом

$$\phi = \left(\frac{3}{2}\right)(D_\sigma - \alpha)(D_\sigma - \alpha) - \gamma^2 \quad (2.34)$$

где  $D_\sigma$  – девиатор тензора напряжений,

$\alpha$  и  $\gamma$  – параметры, определяемые следующим образом

$$\alpha = \frac{2}{3} h_\alpha \dot{\varepsilon} \quad (2.35)$$

$$\gamma = \gamma_0(\varepsilon^{pl}) f_R(\dot{\varepsilon}^{pl}) f_T(T) \quad (2.36)$$

где  $\gamma$  – функция изотропного расширения

$\gamma_0(\varepsilon^{pl}) = h_\gamma \varepsilon_{\text{eff}}^{pl}$  – компонент функции зависимости от пластических деформаций

$f_R(\dot{\epsilon}^{pl})$  – компонент функции влияния скоростей деформаций

$f_T(T)$  – компонент функции влияния температуры

$h_\alpha$  – кинематический параметр упрочнения

$h_\gamma$  – изотропный параметр упрочнения

Если  $h_\alpha = 0$ , то упрочнение принимает вид изотропного, при  $h_\gamma = 0$  – кинематического.

Вследствие отсутствия нормативных и регламентирующих документов и требований по составу динамических характеристик и их значений для пространственных конструктивных материалов при проведении прикладных расчетов применение сложных моделей деформирования и разрушения становится затруднительным.

Для учета влияния скоростей деформаций на напряженно-деформированное состояние примем модель Cowper-Symonds в виде

$$f_R(\dot{\epsilon}^{pl}) = 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{C} \right)^{\frac{1}{P}} \quad (2.37)$$

Основная причина - минимум необходимых входных параметров упрочнения  $C$  и  $P$ .

При решении задач деформирования с разрушением важным этапом становится накопление разрушений на основании введенных критериев, основные из которых были представлены в таблице 1.2 (см. главу 1).

Решение данной проблемы производится введением в программный код процедуры удаления элементов и узлов, им принадлежащих, при выполнении критерия(ев) разрушения. Для большинства программных кодов, использующих метод центральных разностей, данная процедура автоматизирована и уже заложена в алгоритм. Для кодов, использующих неявные схемы интегрирования, данный подход реализуется с применением «самописных» программных надстроек.

### 2.2.7. Сопоставление методов интегрирования прямого интегрирования

*Методы прямого интегрирования*, основанные на применении *явных и неявных схем*, представляют два разных класса подходов к интегрированию уравнений равновесия в рамках метода конечных элементов по времени для задач динамики с развитыми нелинейностями (физической, геометрической и конструктивной). По результатам проведенного сравнения методов составлена таблица 2.1.

*Неявные схемы* требуют достаточно малых шагов по времени с целью улучшения сходимости при протекании сильно нелинейных процессов с большими деформациями, поскольку при большом шаге стартовая итерация может оказаться слишком неточной, при этом сходимость решения не гарантируется, а временной шаг существенно снижается. На устойчивость сходимости так же сильно влияет наличие контактов между телами в процессе исследования. *Явные схемы* отличаются большей устойчивостью и являются менее затратными с точки зрения числа математических операций на цикл, однако находятся в сильной зависимости от величины критического шага основанного на критерии Куранта и качества применяемой конечноэлементной сетки. Наличие контактов не оказывает влияния на устойчивость счета, но занижает величину критического шага интегрирования. Все рассмотренные схемы имеют второй порядок точности решения.

Данные выводы можно дополнить результатами сопоставления схем в работе [137]. Был произведен анализ решения идентичных задач различной размерности, включающих несколько тысяч элементов по явной и неявной схеме интегрирования. В результате использование явных схем было рекомендовано для задач с развитыми нелинейностями (большие деформации, развитые контактные взаимодействия), как более экономичный подход.



Таблица 2.1. Особенности схем интегрирования

Явная схема	Неявная схема
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Для упрощения обращения матриц требуется диагональная матрица масс</li> <li>● Не требуется обращения матрицы жесткости</li> <li>● Все нелинейности, включая контакт, учитываются в векторе внутренних сил</li> <li>● Основное время занимает вычисление вектора внутренних сил</li> <li>● Не требуются проверки на сходимость, для устойчивости решения требуются обеспечение выполнения условия по размеру шага</li> <li>● Минимальный размер шага взаимосвязан с минимальным размером элемента по всей модели</li> <li>● Исследование длительных процессов времени требует достаточно больших затрат машинных ресурсов</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Решение серий линейных аппроксимаций по Ньютону-Рафсону</li> <li>● Необходимо обращение нелинейной матрицы жесткости</li> <li>● Для достижения сходимости при решении физически и геометрически нелинейных процессов требуются малые шаги по времени.</li> <li>● Введение в задачу контактов негативно сказывается на размере шага интегрирования и стабильности решения</li> <li>● Для сильно нелинейных задач сходимость не гарантируется</li> <li>● Проявление пониженной точности при введении демпфирования</li> </ul>

В таблице 2.2 на основании оценки приведенных методов и теоретических материалов [111], [116], [119], [121], [151], [159], [174], [173] приведено сравнение возможности реализации различных видов нелинейностей.

*Таблица 2.2. Сравнение реализуемых типов нелинейностей  
для различных схем интегрирования*

<b>Параметр оценки</b>	<b>Явная схема</b>	<b>Неявная схема</b>
<b>Геометрическая нелинейность</b>		
Малые деформации и повороты	+	+
Малые деформации и большие повороты	+	+
Большие линейные деформации и большие повороты	+	-
Большие линейные деформации и большие повороты (свыше 100%)	+	-
<b>Физическая нелинейность</b>		
Линейно-упругий материал	+	+
Нелинейно-упругий изотропный материал	+	+
Упругопластический материал (кинематическое и изотропное упрочнение)	+	+
Композитные материалы	+	+
Накопление повреждений и разрушение материала	+	-
<b>Конструктивная нелинейность</b>		
Контакт двух и более поверхностей	+	+
Контакт с трением	+	+
«Самоконтакт»	+	-

Как видно из таблицы 2.2, решение задач деформирования с учетом развитых нелинейностей (физической, геометрической и конструктивной) возможно реализовать как с применением *явных схем* интегрирования, так и *неявных схем*. Однако при решении задач сопровождаемых накоплением повреждений и разрушением ряда элементов оптимальным выбором становится применение *явных схем* интегрирования за счет большей устойчивости счета при решении сложных нелинейных задач, использование малых шагов по времени позволяет применять эффективные и экономичные математические алгоритмы с минимумом числа операций на круг.

#### 2.2.8. Основные уравнения метода конечных элементов при решении нелинейных динамических с применением метода центральных разностей

В *лагранжевой* формулировке деформации выражаются как функция начальных координат частицы  $X_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) и текущего момента времени:

$$u_i = u_i(X_\alpha, t) \quad (2.38)$$

Начальные деформации, скорости и ускорения частицы в момент времени  $t = 0$  можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} u_i(X_\alpha, 0) &= X_\alpha \\ \dot{u}_i(X_\alpha, 0) &= V_\alpha \\ \ddot{u}_i(X_\alpha, 0) &= A_\alpha \end{aligned} \quad (2.39)$$

где  $V_\alpha$  и  $A_\alpha$  – начальные скорости и ускорения, а  $\dot{u}_i$  и  $\ddot{u}_i$  – скорости и ускорения в текущий момент времени

Основное уравнение механики твердых тел – уравнение движения, которое может быть записано в следующей форме

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (2.40)$$

где  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений Коши,

$\rho$  – плотность материала

$\ddot{u}$  – ускорение

и удовлетворяющее следующим условиям:

– На поверхности  $\partial b_1$  действует поверхностная распределенная сила  $t_i(t)$

$$\sigma_{ij}n_j = t_i(t), \quad (2.41)$$

– На поверхности  $\partial b_2$  существуют граничные условия по перемещениям

$$x_i(u_\alpha, t) = d_i(t), \quad (2.42)$$

– Условиям по нарушению контакта на поверхности  $\partial b_3$

$$(\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-)n_i = 0 \quad (2.43)$$

где  $n_j$  – единичный вектор внешней нормали к границе поверхности  $\partial b$

Данные уравнения должны выполняться для любой точки тела или поверхности. Для решения задачи численно с использованием метода конечных элементов, формулировка упрощается до выполнения условий в точках интегрирования.

Далее решая уравнения сохранения массы и энергии имеем

$$\begin{aligned} \int_V (\rho \ddot{u}_i - \sigma_{ij,j} - \rho f) \delta u_i dV + \int_{\partial b_1} (\sigma_{ij}n_j - t_i) \delta u_i ds + \\ + \int_{\partial b_3} (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) n_j \delta u_i ds = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Учитывая, что

$$(\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} \delta u_i = \sigma_{ij} \delta u_{i,j} \quad (2.45)$$

Получаем слабую форму уравнения сохранения массы основанную на принципе виртуальной работы

$$\delta P = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV - \int_V \rho f_i \delta u_i dV - \int_{\partial b_1} t_i \delta u_i ds = 0 \quad (2.46)$$

Следующий шаг получения конечноэлементных уравнений – пространственная дискретизация, достигаемая через наложение сеток элементов объединенных в узлах и отслеживание их во времени.

$$x_i(u_\alpha, t) = x_i(u_\alpha(\xi, \eta, \zeta), t) = \sum_{j=1}^k \phi_j(\xi, \eta, \zeta) x_i^j(t) \quad (2.47)$$

где  $\phi_j$  – интерполяционная функция формы

$k$  – число узлов в элементе

$x_i^j$  – узловые координаты  $j$ -ого узла в  $i$ -ом направлении

Суммируя (2.46) по всем элементам имеем

$$\delta P = \sum_{m=1}^n \delta P_m = 0 \quad (2.48)$$

$$\sum_{m=1}^n \left\{ \int_{v_m} \rho \ddot{u}_i \Phi_i^m dv + \int_{v_m} \sigma_{ij}^m \Phi_{i,j}^m dv - \int_{v_m} \rho f_i \Phi_i^m dv - \int_{db_1} t_i \Phi_i^m dv \right\} = 0 \quad (2.49)$$

где  $\Phi_i^m = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)_i^m$

В матричной форме уравнение (2.49) представляется следующим образом

$$\sum_{m=1}^n \left\{ \int_{v_m} \rho [N]^T [N] \{\ddot{u}\} dv + \int_{v_m} [B]^T \{\sigma\} dv - \int_{v_m} \rho [N]^T \{b\} dv - \int_{db_1} [N]^T \{t\} dv \right\} = 0 \quad (2.50)$$

где  $[N]$  – матрица функции формы

$\{\sigma\}$  – вектор напряжений  $\sigma^T = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})$

$[B]$  – матрица, связывающая деформации с перемещениями

$\{\ddot{u}\}$  – вектор узловых ускорений

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} = [N] \begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ \vdots \\ a_{yk} \\ a_{zk} \end{bmatrix} = [N] \{a\} \quad (2.51)$$

$\{b\}$  – вектор объемных сил

$$b^T = [f_x \quad f_y \quad f_z] \quad (2.52)$$

$\{t\}$  – вектор поверхностных сил

$$t^T = [t_x \quad t_y \quad t_z] \quad (2.53)$$

Уравнение (2.47) можно представить в следующей форме

$$[M]\{\ddot{u}\} = \{R\} - \{F\} \quad (2.54)$$

где  $[M]$  – матрица масс,  $\{\ddot{u}\}$  – вектор ускорений

$$[M]\{\ddot{u}\} = \sum_{m=1}^n \int_{v_m} \rho [N]^T [N] \{\ddot{u}\} dv \quad (2.55)$$

$\{R\}$  – вектор внешних сил

$$\{R\} = \sum_{m=1}^n \left( \int_{v_m} \rho [N]^T \{b\} dv + \int_{db_1} [N]^T \{t\} dv \right) \quad (2.56)$$

$\{F\}$  – вектор внутренних сил

$$\{F\} = \sum_{m=1}^n \left( \int_{v_m} [B]^T \{\sigma\} dv + \{F_m^{\text{cont}}\} \right) \quad (2.57)$$

### 2.2.9. Алгоритм расчета

Алгоритм расчета нелинейных процессов деформирования и разрушения выглядит следующим образом (см. рис. 2.5). После введения начальных параметров расчетной модели и вычисления матрицы масс, запускается подпрограмма вычисления суммарного вектора сил и критического шага по времени.

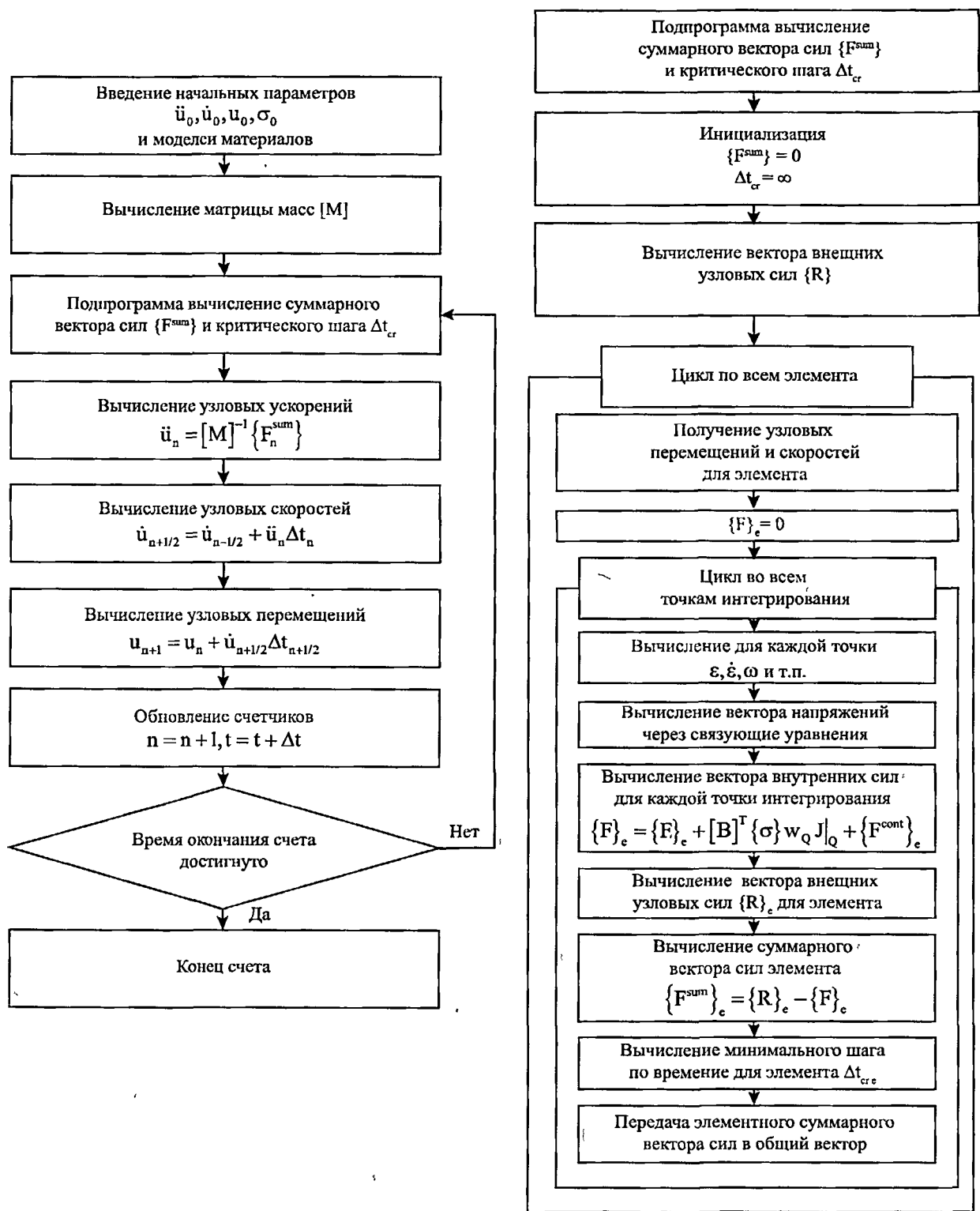


Рисунок 2.5. Схема цикла расчета

На основании полученного вектора производится вычисление узловых ускорений, скоростей и перемещений.

Подпрограмма вычисления суммарного вектора узловых сил построена следующим образом:

- Стадия инициализации. Суммарный вектор принимается равным нулю, а критический шаг по времени – бесконечности
- Вычисляется общий вектор внешних сил  $\{R\}$
- Запускается цикл по всем элементам, на основании которого, заполняется вектор узловых внутренних сил  $\{F\}$ , и определяется минимальный критический шаг по времени  $\Delta t_{cr}$
- Вычисляется суммарный вектор узловых сил  $\{F^{sum}\}$

### 2.2.10. Диагональная матрица масс

Для упрощения обращения матриц, как указывалось ранее, применяется диагональная матрица масс  $[M]$

Возможны два способа диагонализации матрицы масс:

– Суммирование элементов строки в диагональный элемент

$$M_{ii}^D = \sum_j M_{ij}^C \quad (2.58)$$

– Приведение массы конечного элемента в узловые массы через функцию формы элемента

$$M_{ii}^D = \int_v \rho \phi_i^2 dv \quad (2.59)$$

### 2.2.11. Дискретизация по времени

Дискретизация по времени опирается на применение критерия Куранта, который основывается на минимальном интервале времени необходимом для прохождения волны акустических напряжений поперек элемента и в общем виде представлен формулой (2.27).

Для стержневых элементов величина критического шага для обеспечения устойчивости счета вычисляется следующим образом

$$\Delta t = S \frac{1}{c} = S l_c \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (2.60)$$



где  $S$  – масштабный фактор для временного шага (по умолчанию принимается 0.9),  $l_c$  – длина элемента,  $c$  – скорость звука,  $\rho$  – плотность,  $E$  – модуль Юнга.

Оболочечный элемент можно интерпретировать, как серию стержневых элементов, расположенных один за другим. Для учета влияния коэффициента Пуассона на скорость распространения волн вводится коэффициент  $\alpha = \sqrt{1 - \nu^2}$ , а критический шаг по времени можно представить в виде

$$\Delta t = \alpha S l_c \sqrt{\frac{\rho}{E}} = S l_c \sqrt{\frac{(1 - \nu^2) \rho}{E}} \quad (2.61)$$

Для объемных элементов учет влияния коэффициента на скорость распространения волн производится через коэффициент  $\beta = \sqrt{\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)}}$ , а критический шаг по времени представить в виде

$$\Delta t = \beta S l_c \sqrt{\frac{\rho}{E}} = S l_c \sqrt{\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu) \rho}{(1 - \nu) E}} \quad (2.62)$$

В таблице 2.3 значения коэффициентов  $\alpha, \beta$  для ряда значений коэффициента Пуассона, на рисунке 2.6 представлены графики их изменения.

*Таблица 2.3. Коэффициенты критического шага в зависимости от коэффициента Пуассона*

$\nu$	0.00	0.20	0.30	0.40	0.425	0.45	0.475	0.50
$\alpha$	1.00	0.98	0.954	0.917	0.905	0.893	0.872	0.866
$\beta$	1.0	0.949	0.862	0.683	0.610	0.513	0.242	0.000

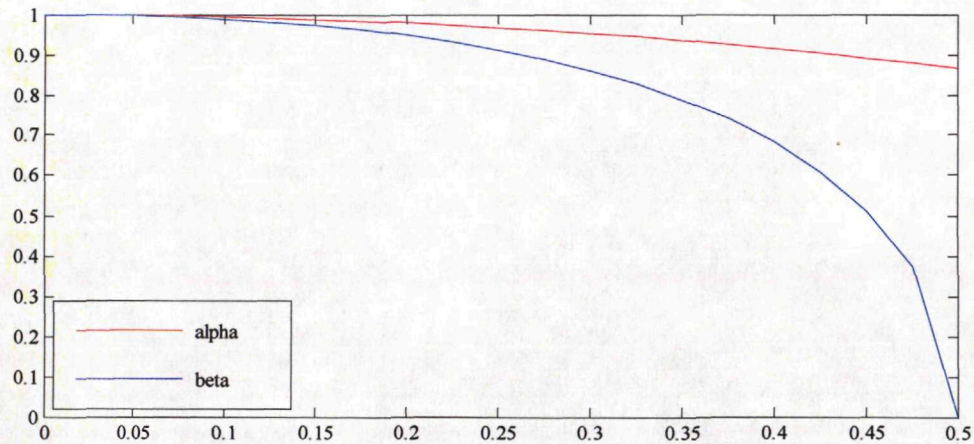


Рисунок 2.6. Коэффициенты критического шага  $\alpha$  и  $\beta$  в зависимости коэффициента Пуассона

### 2.2.12. Обновление напряжений и деформаций

Вычисление напряжений на шаге  $t + dt$  производится следующим образом

$$\sigma_{ij}(t + dt) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij} dt \quad (2.63)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{\nabla} + \sigma_{ik} \omega_{kj} + \sigma_{jk} \omega_{ki} \quad (2.64)$$

где  $\sigma_{ij}^{\nabla}$  – компоненты тензора скоростей нарастания напряжений Яуманна

$$\sigma_{ij}^{\nabla} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.65)$$

$\omega_{kj}$  – спиновый тензор

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\dot{u}_i}{dx_j} - \frac{d\dot{u}_j}{dx_i} \right) \quad (2.66)$$

$C_{ijkl}$  – компоненты тензора состояния

$\dot{\epsilon}_{kl}$  – компоненты тензора скоростей деформаций

$$\dot{\epsilon}_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\dot{u}_k}{dx_l} + \frac{d\dot{u}_l}{dx_k} \right) \quad (2.67)$$

Обновление напряжений производится следующим образом

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + r_{ij}^n + \sigma_{ij}^{\nabla n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (2.68)$$

$$\text{где} \quad \sigma_{ij}^{\nabla n+1/2} \Delta t^{n+1/2} = C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^{n+1/2} \quad (2.69)$$

$$\Delta \varepsilon_{kl}^{n+1/2} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (2.70)$$

$$r_{ij}^n = \left( \sigma_{ip}^n \omega_{pj}^{n+1/2} + \sigma_{jp}^n \omega_{pi}^{n+1/2} \right) \Delta t^{n+1/2} \quad (2.71)$$

Обновление деформаций производится следующим образом

$$\varepsilon_{ij}^{n+1} = \varepsilon_{ij}^n + \rho_{ij}^n + \dot{\varepsilon}_{ij}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (2.72)$$

$$\rho_{ij}^n = \left( \varepsilon_{ip}^n \omega_{pj}^{n+1/2} + \varepsilon_{jp}^n \omega_{pi}^{n+1/2} \right) \Delta t^{n+1/2} \quad (2.73)$$

$r_{ij}^n$  и  $\rho_{ij}^n$  – поворотные корректировки напряжений и деформаций

Данная формулировка предполагает ведение расчета с использованием малых шагов по времени и линеаризацией нелинейных уравнений на каждом шагу. Расчет идет в приращениях параметров состояния, а тензор деформаций вычисляется на каждом шагу через интегрирование тензора скоростей.

### 2.2.13. Выбор формулировок конечных элементов

Важным аспектом также является выбор адекватной формулировки применяемых конечных элементов с точки зрения экономичности потребляемых машинных ресурсов. В таблице 2.4 приведены наиболее популярные формулировки на основании анализа [159], [151], [119]. Все представленные формулировки КЭ ориентированы на решение задач динамики с применением явных схем интегрирования. Для конечных элементов объем требуемого числа математических операций для решения одного элемента при использовании одной точки интегрирования.

Таблица 2.4. Объемы затрачиваемых математических операций на расчет одного элемента.

Тип	Формулировка	Число мат. операций
Объемные КЭ (8-ми узловые)	Hallquist	428
	Flanagan-Belytschko	1328

Тип	Формулировка	Число мат. операций
	Wilkins	1793
Оболочечные КЭ (4-х узловые)	Belytschko-Tsay	725
	Hughes-Liu	4050
	Hughes-Liu (модиф.)	35350
	$C^0$ (треуг. оболочка)	649

В качестве основных расчетных конечных элементов, используемых в решении поставленной задачи деформирования и разрушения, на основании сравнения формулировок приняты: 8-ми узловой объемный КЭ Hallquist и 4-х узловой КЭ элемент оболочки Belytschko-Tsay. Данные элементы подвержены возникновению паразитических форм деформирования, однако при качественном разбиении сетки возможность их проявления сводится к минимуму. Стоит отметить, что разбиение повышенного качества также требуется и для передачи качественной динамической реакции с учетом диагональной матрицы масс.

- *Объемные восьми узловые конечные элементы Hallquist*

Для восьми узловых объемных элементов уравнение функций перемещений и скоростей можно записать следующим образом:

$$u_1(X_{\alpha,t}, t) = u_1(X_{\alpha,t}(\xi, \eta, \zeta), t) = \sum_{j=1}^8 \phi_j(\xi, \eta, \zeta) u_1^j(t) \quad (2.74)$$

$$\dot{u}_1(X_{\alpha,t}, t) = \dot{u}_1(X_{\alpha,t}(\xi, \eta, \zeta), t) = \sum_{j=1}^8 \phi_j(\xi, \eta, \zeta) \dot{u}_1^j(t) \quad (2.75)$$

где  $\phi_j = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_j)(1 + \eta\eta_j)(1 + \zeta\zeta_j)$  – функция формы для 8-ми узлового объемного элемента,  $\xi_j, \eta_j, \zeta_j$  – коэффициенты по единичным векторам при-



Выражения в матрице «деформации-перемещения» можно получить следующим образом. Для этого примем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{aligned}\quad (2.78)$$

или

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \end{bmatrix}\quad (2.79)$$

Необходимые выражения получаем, обращая матрицу Якоби

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix}\quad (2.80)$$

Интегрирование по объему реализуется с помощью гауссовых квадратур. Если принять некоторую функцию  $g$ , заданную поверх всего объема и число  $n$  – число точек интегрирования, то

$$\int_v g d\nu = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g |J| d\xi d\eta d\zeta\quad (2.81)$$

Можно аппроксимировать в виде

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n g_{jkl} |J_{jkl}| w_j w_k w_l\quad (2.82)$$

где  $w_j, w_k, w_l$  – весовые факторы,  $J$  – детерминант матрицы Якоби

$$g_{jkl} = g(\xi_j, \eta_k, \zeta_l) \quad (2.83)$$

Для одноточечной квадратуры

$$\begin{aligned} n &= 1 \\ w_i &= w_j = w_k = 0 \\ \xi_j &= \eta_k = \zeta_l = 0 \end{aligned} \quad (2.84)$$

Уравнение (2.81) можно записать

$$\int_v g dv = 8g(0,0,0)|J(0,0,0)| \quad (2.85)$$

Можно заметить, что  $8|J(0,0,0)|$  – аппроксимирует объем элемента.

Наибольшее преимущество реализации решения с одной точкой интегрирования – существенное снижение времени счета по сравнению с полным интегрированием.

- *Оболочка Belytschko-Tsay.* Элемент имеет свою внутреннюю систему координат, обновляемую на каждом шаге. Координатные элементные векторы ( $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ) определяются через координаты четырех узлов элемента (см. рис. 2.8).

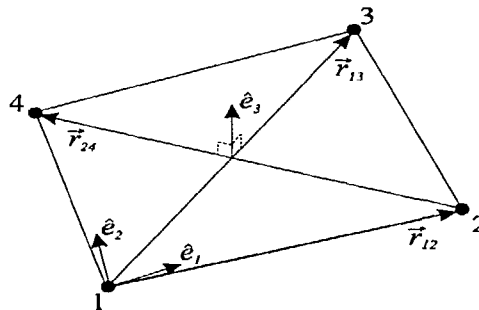


Рисунок 2.8. Система координат оболочки Belytschko-Tsay

Единичные вектора обновляются на каждом шаге по времени, используя текущие координаты узлов в текущий момент времени и, как следствие, система координат вращается вместе с элементом. Процедура построения си-

стемы координат начинается с поиска единичного вектора нормали к двум основным диагоналям элемента. Этот вектор называется  $\hat{e}_3$  и может быть записан следующим образом.

$$\hat{e}_3 = \frac{\vec{r}_{13} \times \vec{r}_{24}}{\|\vec{r}_{13} \times \vec{r}_{24}\|} \quad (2.86)$$

где вектор  $\vec{r}_{13}$  – вектор между узлами 1 и 3,  $\vec{r}_{24}$  – вектор между узлами 2 и 4,  $\times$  – векторное произведение. Единичный вектор  $\hat{e}_1$  выбирается близким к  $\vec{r}_{12}$  и нормальным к  $\hat{e}_3$ :

$$\hat{e}_1 = \frac{\vec{r}_{12} - (\vec{r}_{12} \cdot \hat{e}_3) \hat{e}_3}{\|\vec{r}_{12} - (\vec{r}_{12} \cdot \hat{e}_3) \hat{e}_3\|} \quad (2.87)$$

Вектор  $\hat{e}_2$  выбирается таким образом, чтобы образовывалась правая тройка векторов:

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 \quad (2.88)$$

Если четыре узла элемента лежат в одной плоскости, то единичные векторы  $\hat{e}_1$  и  $\hat{e}_2$  лежат в плоскости элемента, а  $\hat{e}_3$  совпадает направлением толщины. При деформировании элемента вектор  $\hat{e}_3$  может отклоняться от направления толщины. В рамках формулировки отклонение должно быть минимальным, т. е. разница между вращением материала и вращением локальных координат принимается достаточно малой.

Матрицу преобразования между глобальной ( $A = (A_x, A_y, A_z)$ ) и локальной системой координат ( $\hat{A} = (\hat{A}_x, \hat{A}_y, \hat{A}_z)$ ) можно представить следующим образом:

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{A}_x \\ \hat{A}_y \\ \hat{A}_z \end{Bmatrix} = [\mu] \{\hat{A}\} \quad (2.89)$$

Обратное преобразование:



$$\{\hat{A}\} = [\mu]^T \{A\} \quad (2.90)$$

*Зависимость между скоростью и деформациями*

Используя теорию Миндлина для пластин и оболочек, перемещения в любой точке элемента оболочки можно разложить на две составляющие: узловые смещения и узловые повороты. Для определения скорости любой точки в оболочке воспользуемся следующим соотношением

$$\{\dot{u}\} = \{v^m\} + z\{\hat{e}_3\} \times \{\theta\} \quad (2.91)$$

где  $v^m$  – вектор скорости в уровне срединной поверхности оболочки

$\theta$  – вектор угловых скоростей

$z$  – расстояние до точки на фибровой грани

Компоненты тензора скорости деформации задаются следующим образом:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.92)$$

Замена в уравнении (2.92) дает следующие отношения скорость–деформация:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= \frac{\partial v_1^m}{\partial x_1} + z \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \\ \dot{\epsilon}_{22} &= \frac{\partial v_2^m}{\partial x_2} + z \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} \\ \dot{\epsilon}_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1^m}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2^m}{\partial x_1} + z \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} - z \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \right) \\ \dot{\epsilon}_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3^m}{\partial x_2} - \theta_1 \right) \\ \dot{\epsilon}_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3^m}{\partial x_2} - \theta_2 \right) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Вектор скорости срединной поверхности  $\{v^m\}$  и вектор угловых скоростей  $\{\theta\}$  может быть вычислен следующим образом:

$$\begin{aligned}\{v^m\} &= N_I \{v_I\} \\ \{\theta\} &= N_I \{\theta_I\}\end{aligned}\tag{2.94}$$

где  $N_I$  – билинейная функция формы

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\end{aligned}\tag{2.95}$$

Оболочка Belytschko-Tsay использует одну точку интегрирования в элементе ( $\xi = \eta = 0$ ). Подставляя (2.93) в (2.92) имеем

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{11} &= B_{11} v_{11} + z B_{11} \theta_{21} \\ \dot{\epsilon}_{22} &= B_{21} v_{21} + z B_{21} \theta_{11} \\ \dot{\epsilon}_{12} &= \frac{1}{2}(B_{21} v_{11} + B_{11} v_{21} + z B_{21} \theta_{21} - z B_{11} \theta_{11}) \\ \dot{\epsilon}_{23} &= \frac{1}{2}(B_{21} v_{31} - N_I \theta_{11}) \\ \dot{\epsilon}_{13} &= \frac{1}{2}(B_{21} v_{31} - N_I \theta_{21})\end{aligned}\tag{2.96}$$

где

$$B_{11} = \frac{\partial N_I}{\partial x_1}\tag{2.97}$$

$$B_{21} = \frac{\partial N_I}{\partial x_2}\tag{2.98}$$

### *Напряжения и узловые силы*

После решения вышеуказанных выражений, в задаче могут быть определены напряжения «в плоскости» для точки интегрирования. Проинтегрировав результирующие напряжения по толщине оболочки, могут быть получены локальные результирующие силы и моменты:

$$f_{\alpha\beta}^R = \int \sigma_{\alpha\beta} dz \quad (2.99)$$

$$m_{\alpha\beta}^R = -\int z \sigma_{\alpha\beta} dz \quad (2.100)$$

Полученные выше значения результирующих сил и моментов переносятся в узловые точки следующими выражениями:

$$\begin{aligned} f_{1I} &= A (B_{1I} f_{11}^R + B_{2I} f_{12}^R) \\ f_{2I} &= A (B_{2I} f_{22}^R + B_{1I} f_{12}^R) \\ f_{3I} &= Ak (B_{1I} f_{13}^R + B_{2I} f_{23}^R) \\ m_{1I} &= A \left( B_{2I} m_{22}^R + B_{1I} m_{12}^R - \frac{k}{4} f_{23}^R \right) \\ m_{2I} &= -A \left( B_{1I} m_{11}^R + B_{2I} m_{12}^R - \frac{k}{4} f_{13}^R \right) \\ m_{3I} &= 0 \end{aligned} \quad (2.101)$$

где

$A$  – площадь элемента,

$k$  – сдвигающий параметр по теории Миндлина

Локальные силы и моменты переводятся в глобальную координатную систему и суммируются по всем узлам, узловые ускорения решаются глобальные ускорения движения.

## 2.3. Упругопластические модели материалов

### 2.3.1. Билинейная упругопластическая модель с кинематическим и изотропным упрочнением

Модель сформулирована Крейгом и Кейем в 1976 году. Условие пластичности (2.34) для данной модели имеет следующий вид

$$\phi = \frac{1}{2}(D_\sigma - \alpha)(D_\sigma - \alpha) - \frac{\sigma_y^2}{3} \leq 0 \quad (2.102)$$

где

$$\sigma_y = \left( 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}}{C} \right)^{\frac{1}{p}} \right) (\sigma_0 + \beta E_p \epsilon_{\text{eff}}^{\text{pl}}) \quad (2.103)$$

$\sigma_0$  – статический предел текучести

$C$  и  $P$  – параметры упрочнения

$\beta$  – параметр упрочнения ( $0 \leq \beta \leq 1$ ). Если параметр равен нулю, то упрочнение кинематическое, если единице – изотропное

$E_p$  – модуль пластического упрочнения

$$E_p = \frac{E_t E}{E - E_t} \quad (2.104)$$

$E_t$  – модуль упрочнения

$E$  – модуль упругости

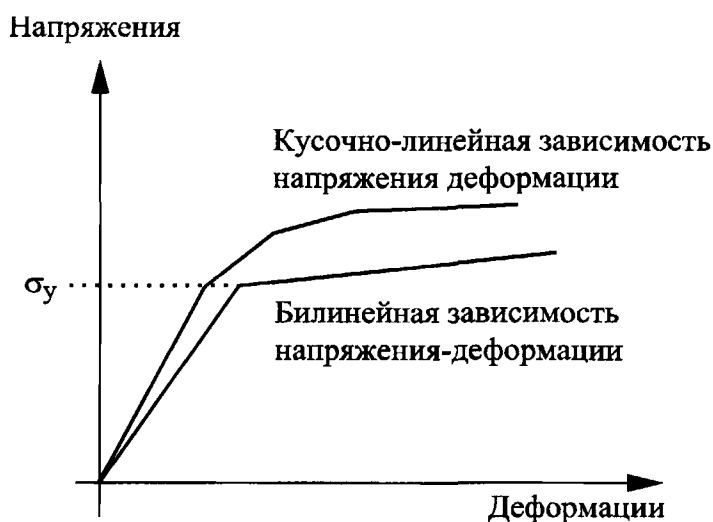


Рисунок 2.9. Билинейная и кусочно-линейная зависимости «напряжения-деформации»

### 2.3.2. Кусочно-линейная упругопластическая модель с изотропным упрочнением с возможностью разупрочнения

Условие пластичности (2.34) для данной модели имеет следующий вид

$$\phi = \frac{1}{2} D_{\sigma} D_{\sigma} - \frac{\sigma_y^2}{3} \leq 0 \quad (2.105)$$

где

$$\sigma_y = \left( 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}}{C} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \beta \left( \sigma_0 + f_h \left( \epsilon_{\text{eff}}^p \right) \right) \quad (2.106)$$

$f_h \left( \epsilon_{\text{eff}}^p \right)$  – функция упрочнения, представленная в табулированной форме

Функция разупрочнения  $\omega$  задается в следующем виде

$$\omega = \frac{A_{\text{loss}}}{A} = \frac{\epsilon_{f2}^{\text{pl}} - \epsilon_{\text{eff}}^{\text{pl}}}{\epsilon_{f2}^{\text{pl}} - \epsilon_{f1}^{\text{pl}}}, 0 \leq \omega \leq 1 \quad (2.107)$$

где  $A_{\text{loss}}$  – площадь пустот в сечении

$A$  – площадь сечения

$\epsilon_{\text{eff}}^{\text{pl}}$  – пластические деформации

$\epsilon_{f1}^{\text{pl}}$  – пластические деформации разрушения материала

$\epsilon_{f2}^{\text{pl}}$  – пластические материалы образования пустот

## 2.4. Контактные алгоритмы

Реализация контактных взаимодействий в процессе деформирования и разрушения является достаточно сложной задачей. Решение данной проблемы возможно с применением ряда контактных алгоритмов:

- *Метод кинематических ограничений.* На первом шаге вычисляется неконтактное решение. После получения перемещений и определения контакта, величины проникновения контактных поверхностей корректируются. Величина контактной силы  $F_C$ , требуемая для устранения проникновения  $\Delta L$  узлов контактирующей поверхности, определяется следующим образом

$$F_C^n = \frac{M_C \Delta L}{\Delta t^2} n \quad (2.108)$$

где  $n$  – вектор нормали к основной поверхности

Целевая поверхность получит определенный импульс в зависимости от соотношения узловых масс целевой и контактирующей поверхности.

Проекции контактной силы  $F$  и массы  $M$  узлов контактирующей поверхности на целевой сегмент можно записать в следующем виде

$$F_T^n = \phi_i F_C^n \quad (2.109)$$

$$M_T = \phi_i M_C \quad (2.110)$$

где  $\phi_i$  – функция формы, связывающая перемещения контактной поверхности с каждым узлом целевой поверхности

Ускорения узлов  $\ddot{u}_T^n$  целевой поверхности определяется через решение следующего уравнения

$$\left( M_T + \sum M_{T_i} \right) \ddot{u}_T^n = \sum F_{T_i}^n \quad (2.111)$$

Ускорения узлов контактирующей поверхности выражаются следующим образом

$$\ddot{u}_C^n = \ddot{u}_C^{n*} - \sum \ddot{u}_T^n \phi_i \quad (2.112)$$

Вычисление сил трения производится следующим образом

$$F_C^T = \min(\mu F_C^N, F_C^{T*}) \quad (2.113)$$

$$F_C^{T*} = M_C \frac{\dot{u}_T}{\Delta t} \quad (2.114)$$

где  $\dot{u}_T$  – тангенциальная скорость

• *Метод штрафных функций.* В этом методе величина нормальных контактных нагрузок принимается пропорционально невязке условий непроникания (внедрения) с учетом большого коэффициента штрафа.

Условие можно записать следующим образом

$$F_p^n = A \cdot n (K_n \Delta L + K_D \Delta \dot{L}) \quad (2.115)$$

где  $A$  – площадь контакта

$n$  – вектор нормали к основной поверхности

$K_n$  – нормальная жесткость

$K_D$  – динамическая нормальная жесткость

$\Delta L$  – величина проникновения

$\dot{\Delta L}$  – скорость проникновения

Вычисление сил трения производится следующим образом

$$F_p^T = \min(\mu F_p^n, F_p^{T*}) \quad (2.116)$$

$$F_p^{T*} = AK_T \Delta L_T \quad (2.117)$$

где  $K_T$  – тангенциальная жесткость

$\Delta L$  – тангенциальное смещение

## 2.5. Выбор базового программного комплекса проведения расчетов

### 2.5.1. Сравнительный анализ программных комплексов

К настоящему времени разработаны и используются; по преимуществу в машиностроении, промышленные программные комплексы решения нелинейных динамических задач, использующие метод конечных элементов с явной схемой интегрирования по времени, среди которых можно выделить ABAQUS/Explicit, AUTODYN и LS-DYNA.

Комплексы имеют сходную математическую основу в виде метода конечных элементов с применением явной схемы интегрирования по времени методом центральных разностей. В таблице 2.5 представлено сравнение программных комплексов по ряду параметров.

Таблица 2.5. Возможности программных комплексов и решаемые виды задач

Параметры сравнения	LS-DYNA	AUTODYN	ABAQUS/EXPLICIT
Ориентированность	● Нелинейные задачи нестационарной динамики с	● Сильно нелинейные задачи высокоскорост-	● Сильно нелинейные динамические и квази-

Параметры сравнения	LS-DYNA	AUTODYN	ABAQUS/EXPLICIT
	низкими и средними скоростями ● Сильно нелинейные квазистатические процессы деформирования	ного взаимодействия	статические задачи
Кол-во применяемых моделей материалов	● 200 моделей	● 21 модель	● 33 модели
Кол-во используемых уравнений состояния	● 9 видов уравнений	● 9 видов уравнений	● 8 видов уравнений
Кол-во методов решения контактных взаимодействий	● 3 метода (наличие контактов типа стержень-стержень)	● 2 метода	● 2 метода
Примечание	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Имеется возможность решать задачи динамики во времени с помощью методов прямого интегрирования, основанных как на явных схемах интегрирования, так и неявных</li> <li>● Реализованы возможности по учету этапности возведения</li> <li>● Возможность переключения в процессе расчета с явной схемы на неявную</li> </ul>		

По результатам проведенного сравнения в качестве основного рабочего комплекса принят ПК LS-DYNA, прежде всего за счет большего количества используемых моделей материалов, более развитых возможностей расчета



контактных взаимодействий (в том числе, контакты типа «стержень-стержень»), использования возможностей по учету этапности возведения для реализации генетических видов нелинейностей.

#### 2.4.2. Оценка возможностей распараллеливания решения выбранным программным комплексом

В зависимости от типа многопроцессорной системы применяются различные средства распараллеливания:

- Системы с общей памятью (SMP) – набор параллельно работающих процессоров, имеющих доступ к общей для всех процессоров памяти, причем скорость доступа к памяти одинакова для всех процессоров. Применяется программирование в модели общей памяти.

- Системы с распределенной памятью (MPP) – набор узлов, состоящих из процессора, памяти и коммутационной среды для связи между узлами. Каждый процессор имеет непосредственный доступ только к своей локальной памяти. При программировании применяется модель передачи сообщений, используются библиотеки MPI, PVM и др.

В виду доступности версии, не поддерживающей MPP-распараллеливания, рассмотрим использование SMP-распараллеливания.

Оценка масштабируемости решения и эффективности использования ядер на высокопроизводительных кластерах рассматривается в работе Юна-Сео Ро (Youn-Seo Roh): [202].

Характеристики вычислительной машины:

- Процессор – Intel Core i7 2600 3.40 GHz (Hyper-Threading)
- Оперативная память – 16 Gb

Процессор имеет четыре ядра, однако, благодаря режиму Hyper-Threading, возможно использовать до восьми виртуальных ядер.

Тесты производительности:

- *Шарнирно опертая балка*. Опорные узлы выполнены из оболочечных элементов, выполненных в виде жестких тел. Материал балки – линейно

упругий. Приложение нагрузки в середине балки от 0 до 10 кН длится в течение одной секунды. Результаты расчетов представлены в таблице 2.6.

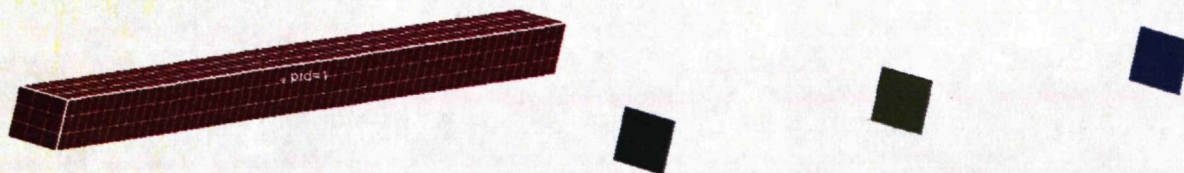


Рисунок 2.10. LS-DYNA модель балки и жестких тел

Таблица 2.6. Время счета задачи шарнирно опертой балки

Тип элемента	Число элементов и узлов	1 ядро, сек.	2 ядра, сек.	4 ядра, сек.	8 ядер, сек.(HT <sup>1</sup> )
<i>Одинарная точность</i>					
Об. элементы с одной точкой интегрирования	567/976	10	8	8	16
	4428 /5929	113	81	71	93
	34992/40729	2236	1310	1043	-
Об. элементы с полным интегрированием	567/976	20	14	15	24
	4428 /5929	307	152	144	159
<i>Двойная точность</i>					
Об. элементы с одной точкой интегрирования	567/976	14	12	10	18
	4428 /5929	201	122	100	120
Об. элементы с полным интегрированием	567/976	32	24	22	25
	4428 /5929	497	263	199	210

– Изгиб защемленной с одной стороны упругой оболочки. Опорные узлы выполнены из балочных элементов, выполненных в виде жестких тел. Приложение нагрузки производится по краю оболочки (рис. 2.11) через твердое тело от 0 до 250 кНм в течение одной секунды.

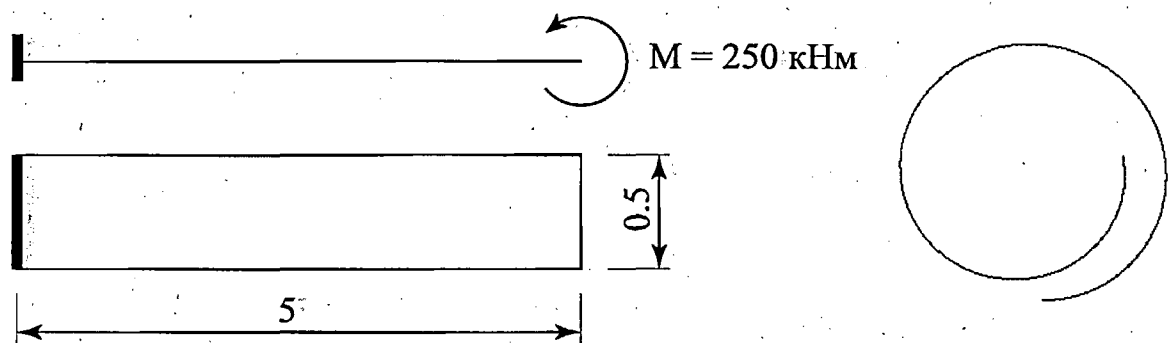


Рисунок 2.11. Схема загрузки и деформированная схема оболочки

Таблица 2.7. Время счета для задачи изгиба оболочки моментом

Тип элемента	Число элементов и узлов	1 ядро, сек.	2 ядра, сек.	4 ядра, сек.	8 ядер, сек. (HT <sup>1</sup> )
<i>Одинарная точность</i>					
Обол. элементы Belytschko-Tsay	372/439	15	11	12	28
	1464/1597	118	56	49	80
Обол. элементы Hughes-Liu	372/439	8	6	6	23
	1464/1597	50	31	26	63
Обол. элементы Belytschko-Tsay с полным интегрированием	372/439	19	14	13	31
	1464/1597	132	83	71	112
<i>Двойная точность</i>					
Обол. элементы Belytschko-Tsay	372/439	20	14	14	32
	1464/1597	144	86	71	109
Обол. элементы Hughes-Liu	372/439	11	8	7	24
	1464/1597	77	48	37	75
Обол. элементы Belytschko-Tsay с полным интегрированием	372/439	29	20	17	36
	1464/1597	219	127	108	142

По результатам тестовых расчетов задач для сеток разной плотности можно сделать следующие выводы:

- Масштабируемость решения увеличивается с ростом объема задачи

- Использование HYPERTHREADING в процессоре для данного решателя снижает скорость счета задачи по отношению к тестам, проведенным без применения технологии
- С ростом числа используемых ядер происходит снижение эффективности использования каждого из них

### **Выводы по главе 2:**

1. Предложен подход и разработана реализующая его численная методика моделирования нелинейного деформирования и разрушения большепролетных сооружений с учетом инициирующего разрушения и(или) закритической работы тяжело нагруженных конструктивных узлов и элементов.

2. Проведен анализ и отбор метода прямого интегрирования в форме метода центральных разностей, как наиболее оптимального алгоритма решения предполагаемого круга квазистатических и динамических задач с развитыми нелинейностями.

3. Проведена оценка применимости различных формулировок задач с большими перемещениями и деформациями.

4. Основываясь на проведенном многопараметрическом сравнительном анализе численных методов решения трехмерных задач статики и динамики с развитыми нелинейностями (физической, геометрической и конструктивной), в качестве основного выбран метод конечных элементов с явной схемой интегрирования по времени, реализованный в программном комплексе LS-DYNA.

## ГЛАВА 3. ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ РАСЧЕТОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ

### 3.1. Общие сведения о верификации

Важным этапом в апробации метода решения поставленных исследовательских задач является верификация выбранного алгоритма численного решения. Методология построения и исчерпывающей верификации численных моделей (и программных комплексов, их реализующих) включает:

- Сравнение с известным набором (по «профилю») относительно простых тестовых задач
- Сравнение с известными аналитическими решениями при предельных переходах и/или упрощениях расчетной модели
- «Установление» численного решения на последовательно сгущающихся сетках КЭ (статические и динамические задачи), шагах по нагрузке (нелинейные задачи) и времени (динамические задачи)
- Теоретически объяснимую близость или различие результатов при использовании КЭ, реализующих различные гипотезы деформирования элементов конструкции
- Теоретически объяснимую близость или различие результатов при использовании альтернативных моделей поведения материалов
- Соответствие численного решения физическому смыслу
- Идентичность результатов, полученных по альтернативным схемам решения систем линейных алгебраических уравнений равновесия, проблем собственных значений, уравнений динамики и др. вычислительных (алгебраических) задач
- Контролируемая близость результатов, полученных по конкурирующим программным комплексам (при одинаковых исходных данных)
- Соответствие численного решения достоверным опытными данным

Представленный набор верификационных примеров охватывает следующие классы нелинейных задач: геометрическая, физическая, конструктивная нелинейности.

### 3.2. Задачи с геометрической нелинейностью

#### 3.2.1. Ферма Мизеса

Ферма Мизеса – система с двумя степенями свободы, состоящая из двух ферменных элементов и загружаемая через пружинный элемент заданной жесткости  $C$  (см. рис. 3.1).

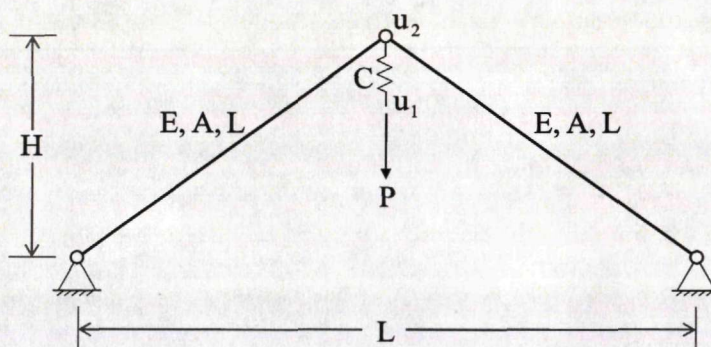


Рисунок 3.1. Фермы Мизеса

Задача является одним из основных тестовых примеров геометрически нелинейных задач, сопровождаемых «прохлопыванием». Моделируется трехмерная система с ограничением перемещений из расчетной плоскости.

*Геометрия системы:*

$$L = 2 \text{ ед. длины}$$

$$H = 0.25 \text{ ед. длины}$$

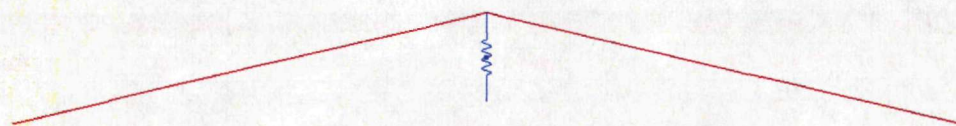


Рисунок 3.2. Расчетная схема фермы Мизеса

*Жесткости:* Сечение – круг диаметром 0.02 ед. длины

Модуль упругости –  $2 \times 10^8$  ед. силы / ед. длины<sup>2</sup>

Коэффициент Пуассона – 0.3,

Плотность – 7.85 ед. массы / ед. длины<sup>3</sup>

К свободному узлу (узел 1) пружины прикладывается заданное перемещение. В процессе расчета оценивается продольное усилие в пружине по отношению к перемещениям двух узлов: узел сопряжения ферменных элементов и пружины (узел 1) и узел приложения нагрузки (узел 2).

Расчет производится в геометрически нелинейной постановке без учета физической нелинейности, как в ферменных элементах, так и пружинных.

Теоретическое решение имеет следующую форму:

$$T_{cr} = 2EA \sqrt{(H_0^2 \cdot l^4 + l^6)^{1/3} - l^2} \times \left( 1 - \sqrt{\frac{(H_0^2 \cdot l^4 + l^6)^{1/3}}{H_0^2 + l^2}} \right) \times \frac{1}{(H_0^2 \cdot l^4 + l^6)^{1/6}} = 355.4$$

где  $E$  – модуль упругости

$A$  – площадь сечения,  $H_0$  – исходная высота фермы,  $l$  – половина пролета фермы ( $l = L/2$ )

*Результаты:*

По результатам проведенных расчетов полученные величины критической силы имеет расхождение с теоретическими результатами порядка 1% (теоретическое значение – 355.4 ед. силы, полученные значения представлены в таблице 3.1). На рисунках 3.3–3.5 представлены кривые деформирования при различных жесткостях пружины.

Таблица 3.1. Критическое усилие потери устойчивости, ед. силы

Теория, ед. силы	Критическое усилие при различных жесткостях пружины		
	0.05EA	0.1EA	EA
355,4 ед. силы	358,9 ед. силы	359 ед. силы	358,9 ед. силы
Расхождение с теорией	0.98%	1.01%	0.98%

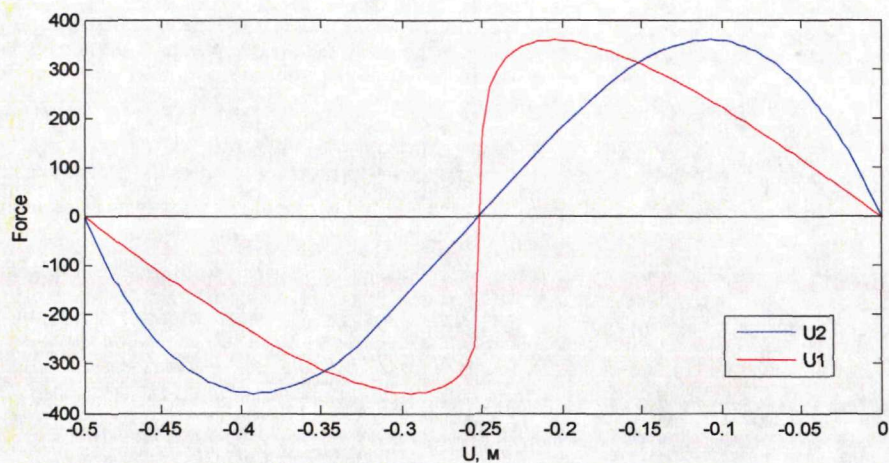


Рисунок 3.3. Зависимость усилия  $F$  в пружине от перемещения узлов  $U1$  и  $U2$  (жесткость пружины  $0.1EA$ )

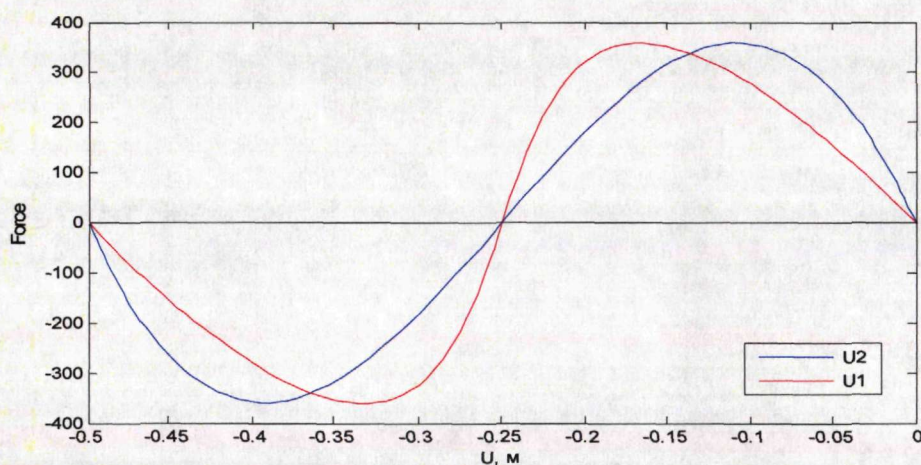


Рисунок 3.4. Зависимость усилия  $F$  в пружине от перемещения узлов  $U1$  и  $U2$  (жесткость пружины  $0.005EA$ )

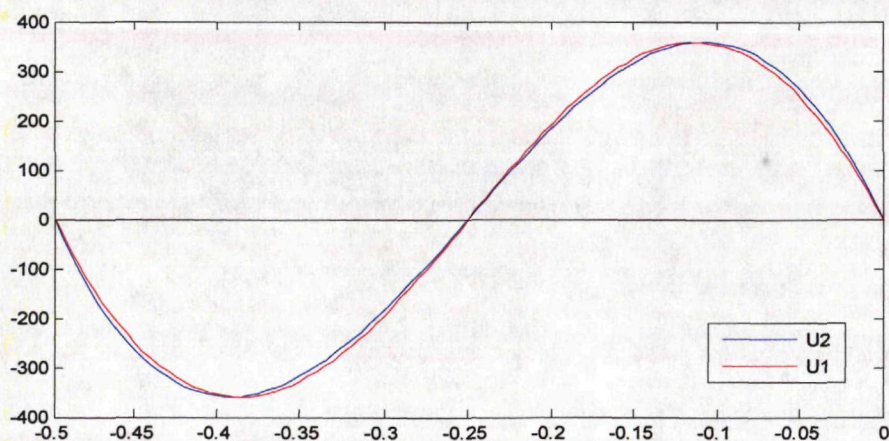


Рисунок 3.5. Зависимость усилия  $F$  в пружине от перемещения узлов  $U1$  и  $U2$  (жесткость пружины  $EA$ )



### 3.2.2. Устойчивость пространственного геодезического купола

Данная задача представляет класс пространственных задач потери устойчивости, которые сопровождаются «прохлопыванием». Нагрузка прикладывается к центральному узлу 1 (см. рис. 3.6). Точность изготовления конструкции принимается идеальной, локальная устойчивость стержней не учитывается. Материал работает в упругой стадии. В задаче используются двадцать четыре ферменных элемента. Площадь сечения одинаковая по всем элементам. Опоры в узлах 9-13 закреплены от смещения по трем направлениям.

Площадь сечения –  $A = 1$  ед. длины<sup>2</sup>

Модуль упругости  $E = 10\,000$  ед. силы / ед. длины<sup>2</sup>

Коэффициент Пуассона – 0.3

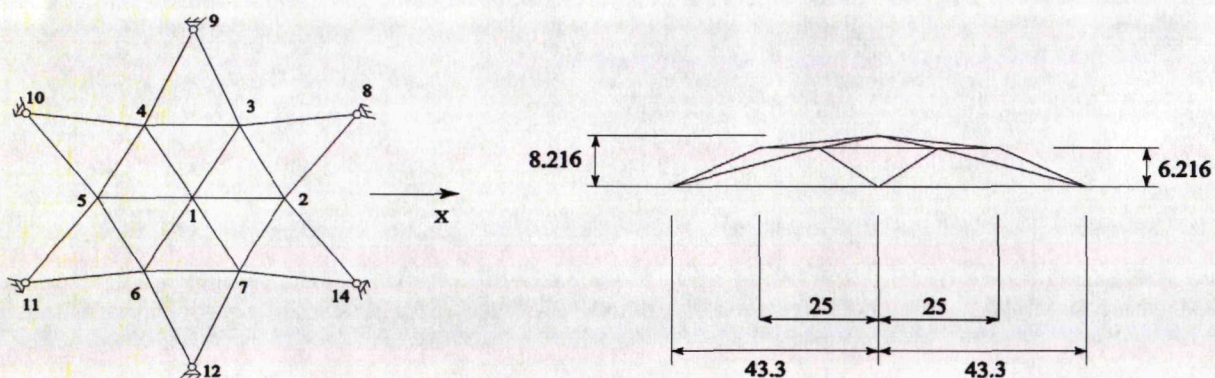


Рисунок 3.6. Схема геодезического купола

#### Результаты:

Первая критическая точка достигается при значении нагрузки  $3.15 \times 10^{-4} EA$ . Имеется хорошая сходимость с результатами Хангая, Джаганнатанама и Парадракакиса. На рисунках 3.7-3.9 представлены зависимости «нагрузка–перемещения».

Таблица 3.2. Сопоставление величин критических нагрузок

Наименование опыта	Hangai	Jagannathan	Paradrakakis	Павлов А. С. (результат моделирования)
Результат ( $\frac{P}{EA} \times 10^4$ )	3.15	3.17	3.14	3.1568
Расхождение с результатами проведенного моделирования	0.22%	0.42%	0.54%	—

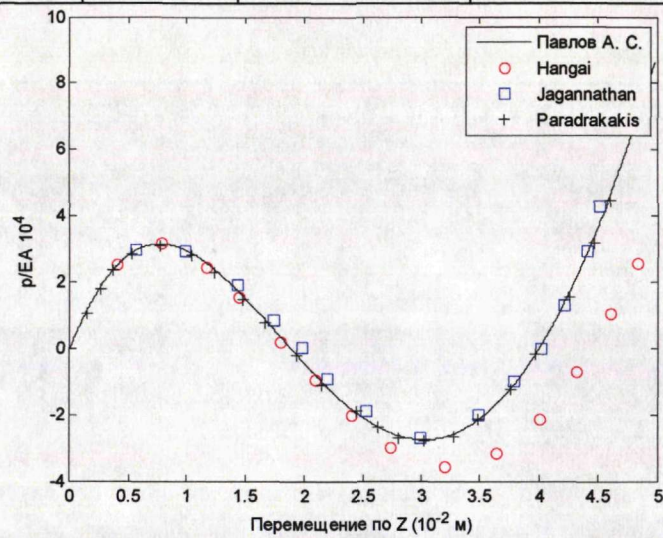


Рисунок 3.7. Зависимость «нагрузка–перемещение» узла 1 вдоль оси Z

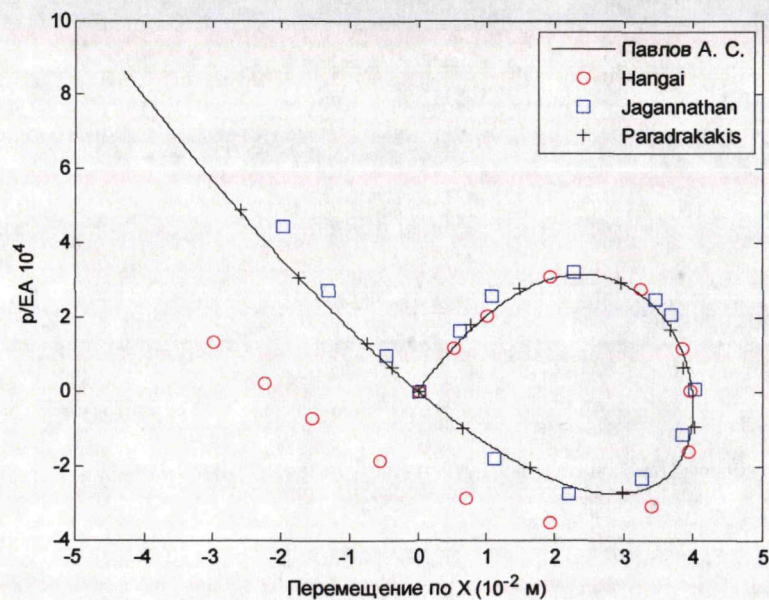


Рисунок 3.8. Зависимость «нагрузка–перемещение» узла 2 вдоль оси X

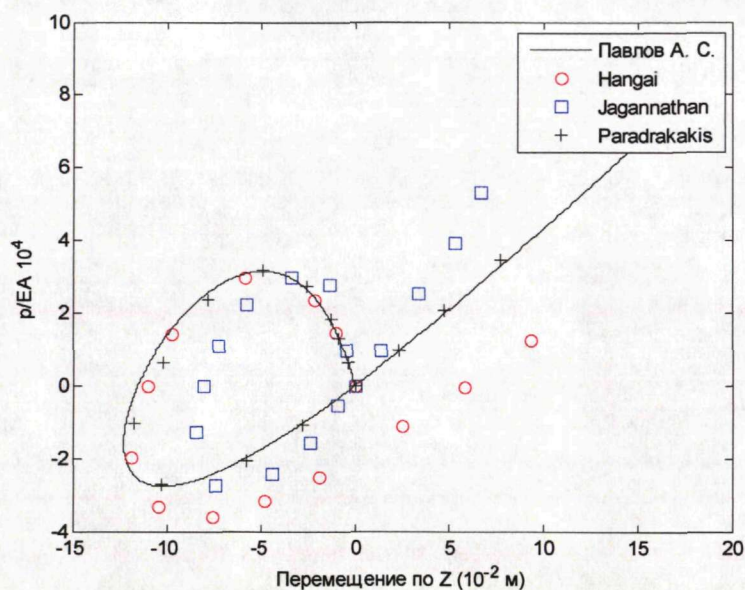


Рисунок 3.9. Зависимость «нагрузка–перемещение» узла 2 вдоль оси Z

### 3.2.3. Петля Уильямса

«Петля Уильямса» – геометрически нелинейная задача потери устойчивости  $\wedge$ -образной рамы, впервые аналитически решенная Уильямсом. Схема задачи представлена на рисунке 3.10. Позднее задача рассматривалась рядом авторов:

- Вудом и Зенкевичем. Стержень моделировался пятью двухузловыми лагранжевыми изопараметрическими элементами по длине стержня. Кроме получения кривой «нагрузка–перемещение по Z», была получена зависимость «нагрузка–опорная реакция по направлению X».
- Кондохом, Танакой и Алтури. Получено численное решение задачи.

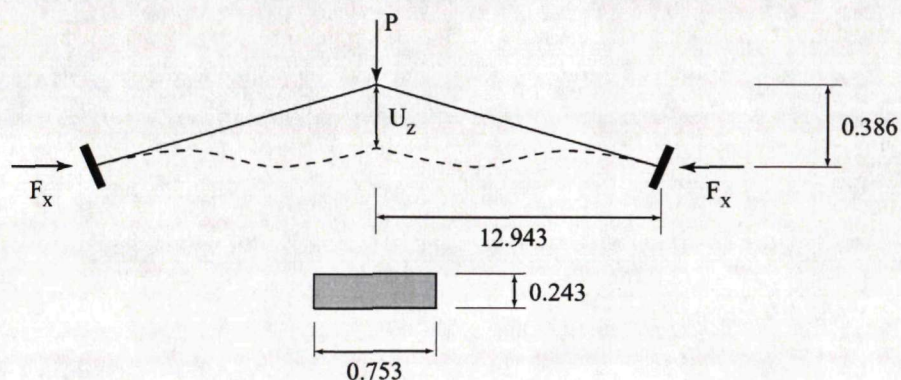


Рисунок 3.10. Схема «Петли Уильямса»

Моделирование задачи производилось в трехмерной постановке с ограничением перемещений из плоскости (для соответствия условиям рассматриваемой задачи). Использовались стержневые балочные элементы Hughes-Liu с интегрированием по сечению. Аналогично решению Зенкевича и Вуда стержень разбивается на пять элементов по длине.

*Жесткости:*

Принятый модуль упругости -  $E = 1.03 \times 10^7$  ед. силы/ед. длины<sup>2</sup>

Сечение – прямоугольное с размерами 0.243x0.753 ед. длины

*Результаты:*

Полученные результаты расчета и их сравнение с известными решениям задачи представлены в таблице 3,3. Теоретическая критическая точка достигается при значении нагрузки ~34 ед. силы. Невязка полученных результатов составила порядка 6 процентов, при этом формы зависимостей «нагрузка–перемещения» имеют схожие структуры.

*Таблица 3.3. Сопоставление величин критических нагрузок*

<i>Наименование опыта</i>	<i>Williams</i>	<i>Kondoh</i>	<i>Wood, Ziekiewicz</i>	<i>Павлов А. С. (результат моделирования)</i>
<i>Результат (ед. силы)</i>	<i>33.9 ед. силы</i>	<i>34 ед. силы</i>	<i>33.8 ед. силы</i>	<i>36 ед. силы</i>
<i>Расхождение с результатами проведенного моделирования</i>	<i>6.19%</i>	<i>5.88%</i>	<i>6.51%</i>	<i>—</i>

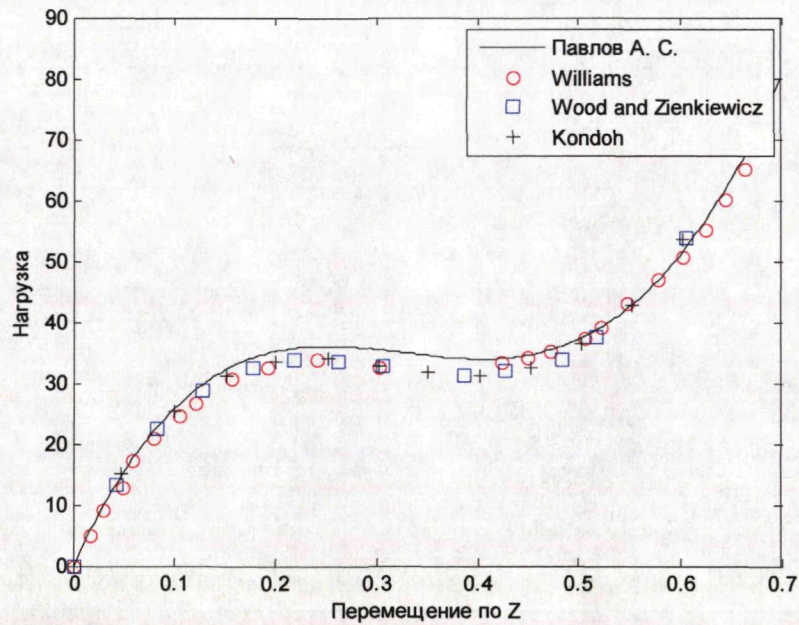


Рисунок 3.11. Зависимость «нагрузка-перемещение по Z»

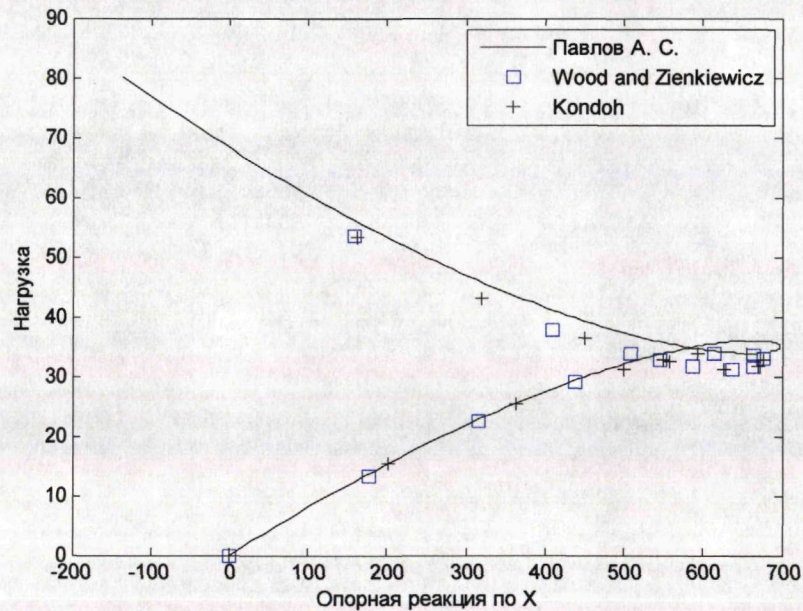


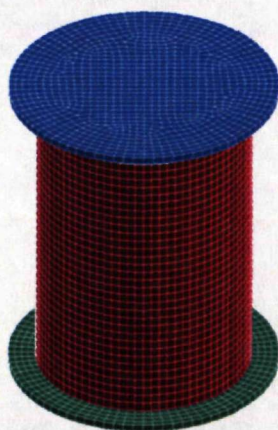
Рисунок 3.12. Зависимость «нагрузка-опорная реакция по X»

### 3.2.4. Осевое сжатие круговой цилиндрической оболочки

Тонкостенные цилиндрические оболочки представляют широкий класс задач с геометрической нелинейностью. Рассмотрим задачу равномерного осевого сжатия цилиндрической оболочки и сопоставим с опытными данными Приядарсини и Калянарамана.

*Исходные данные:* Испытуемый образец представляет собой цилиндрическую оболочку диаметром 300 мм и высотой 400 мм. Толщина стенки со-

ставляет 0.125 мм. Материал трубы – ортотропный с продольным и поперечным модулями упругости 148500 МПа и 9850 МПа соответственно. Модуль сдвига в плоскости – 4800 МПа, коэффициент Пуассона – 0.286, плотность – 1700 кг/м<sup>3</sup>.



*Рисунок 3.13. Расчетная LS-DYNA модель*

Для моделирования ортотропного материала применялась модель \*MAT\_ORTHOTROPIC\_ELASTIC. В качестве оболочечных элементов использовались оболочки Belytschko-Tsay. Расчетная модель представлена на рисунке 3.13. На границах оболочки устанавливались закрепления от смещения и поворотов. Обжатие оболочки производилось с помощью двух равномерно смещающихся жестких тел-прессов.



*Рисунок 3.14. Полученная и опытная формы потери устойчивости оболочки*

*Результаты:*

По результатам проведенного анализа составлена таблица 3.4, в которой сопоставлены экспериментальные данные и результаты моделирования. Рас-

хождения данных численного моделирования с экспериментальным значением составило 0.3%. Форма потери устойчивости представлена на рисунке 3.14.

Таблица 3.4. Сопоставление величин критических нагрузок

Наименование опыта	Приядарсини. Эксперимент/численное моделирование	Павлов А. С. (результат моделирования)
Результат	98.9/99.0 кН	99.2 кН
Расхождение с результатами моделирования	0.3 %	—

### 3.3. Задачи с физической нелинейностью

#### 3.3.1. Испытание стального образца на растяжение

Классическим опытом оценки пластических свойств материалов является опыт на осевое растяжение образца. Проведенное численное моделирование основано на испытаниях проф. Г. А. Филиппова в рамках экспертизы причин обрушения СОК «Трансвааль-парк». За основу было взято испытание цилиндрического образца диаметром 5 мм.

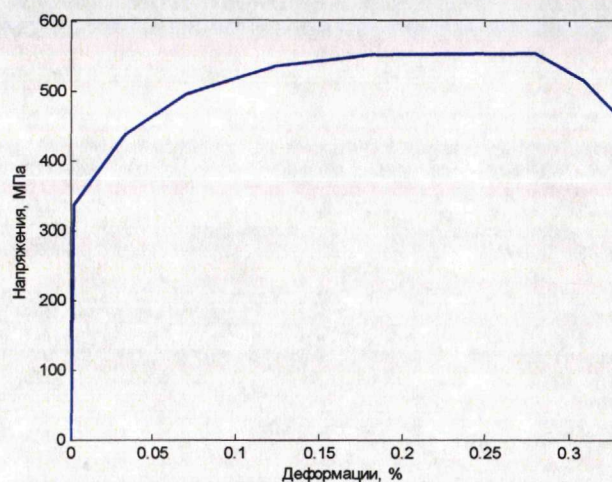


Рисунок 3.15. Экспериментальная зависимость «инженерные напряжения – инженерные деформации»

Моделирование захватов испытательной машины производилось путем введения граничных условий и приложения нагрузки по периметру цилиндров в зоне захватов.

В рамках численного моделирования производилось сопоставление зависимостей нагрузка-деформация. Для воспроизведения свойств стали применялись пластические модели материалов:

- \*MAT\_PLASTIC\_KINEMATIC (модель 1. Билинейная модель)
- \*MAT\_PLASTICITY\_WITH\_DAMAGE (модель 2. Кусочно-линейная модель)

Параметры материалов установлены на основе зависимостей «инженерные напряжения–деформации», представленных на рисунке 3.15.

В используемых моделях материалов используются истинные напряжения и деформации, вычисляемые следующим образом:

$$\varepsilon_{\text{ист}} = \ln(1 + \varepsilon_{\text{инж}}) \quad (3.1)$$

$$\sigma_{\text{ист}} = \sigma_{\text{инж}} \times (1 + \varepsilon_{\text{инж}}) \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{\text{ист}}^{\text{pl}} = \varepsilon_{\text{ист}} - \frac{\sigma_{\text{ист}}}{E} \quad (3.3)$$

#### *Результаты:*

Проведенное численное моделирование показало, что для моделирования квазистатических процессов деформирования материала оптимальные результаты дает применение кусочно-линейных моделей материалов. Для данной модели невязки полученных напряжений лежат в интервале от 2 до 10 %. На рисунке 3.17 представлены зависимости «инженерные напряжения–инженерные деформации», полученные на основании опытных и численных экспериментов.



Модель 1



Модель 2



Рисунок 3.16. Деформированная схема образцов для различных моделей

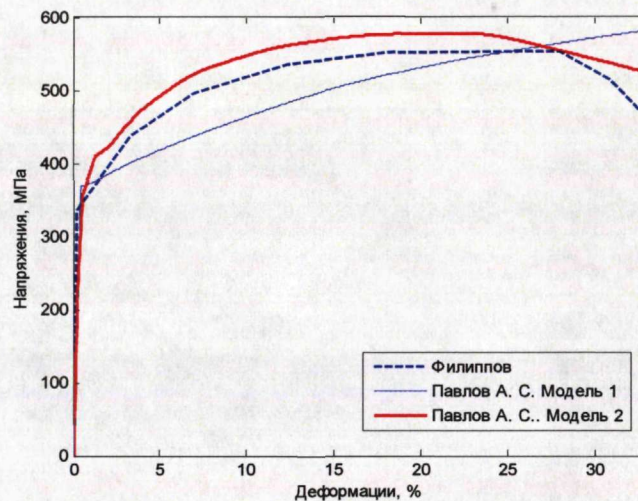


Рисунок 3.17. Полученные расчетные зависимости «инженерные напряжения – инженерные деформации»

### 3.3.2. Испытание стального образца на сдвиг

Испытание металлических образцов на сдвиг, как и одноосное растяжение, являются классическими примерами исследования нелинейных свойств материалов. Пример испытания представлен на рисунке 3.18.

В рамках численного моделирования производилось сопоставление зависимостей нагрузка-деформация. Параметры материалов установлены исходя из опытных данных. Для воспроизведения свойств стали применялись следующие модели материалов:

- \*MAT\_PLASTIC\_KINEMATIC (модель 1)
- \*MAT\_PLASTICITY\_WITH\_DAMAGE (модель 2)

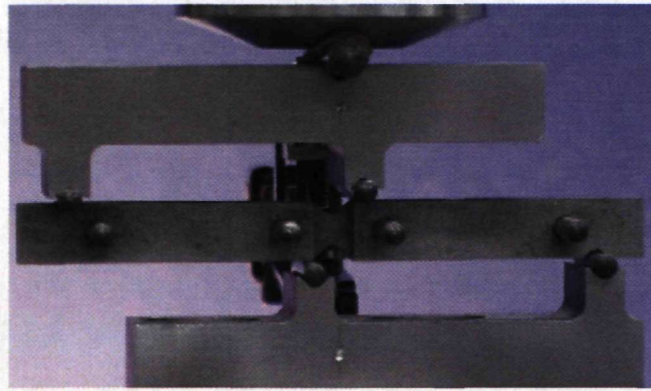


Рисунок 3.18. Испытание металлического образца на сдвиг.

*Результаты:*

По результатам проведенного численного моделирования установлены величины критических смещений в образце, вызывающие его разрушение. Невязка полученных результатов находится в пределах 6.67-12%. На рисунке 3.19 представлена картина разрушения, на рисунке 3.20 - зависимости «инженерные напряжения – инженерные деформации».

Таблица 3.5. Сопоставление результатов

Опыт	Feucht	Павлов А. С. (модель 1)	Павлов А. С. (модель 2)
Смещение образца, соответствующее моменту разрушения	1.125 мм	1.26 мм	1.2 мм
Расхождение с результатами опыта	–	12 %	6.67 %

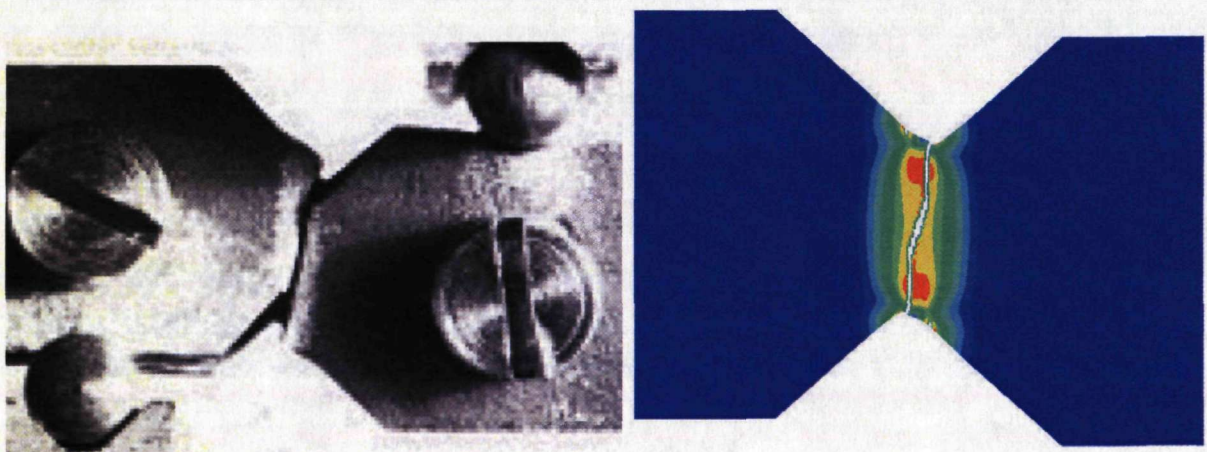


Рисунок 3.19. Экспериментальная и смоделированная картины разрушения образца

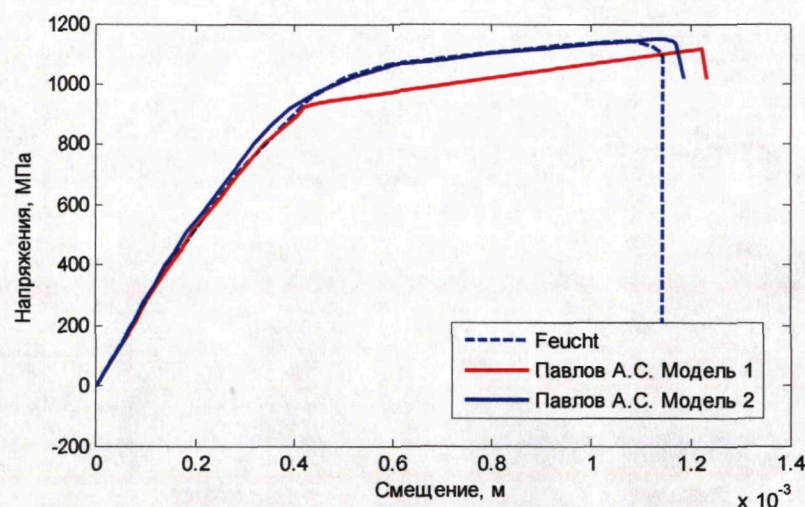
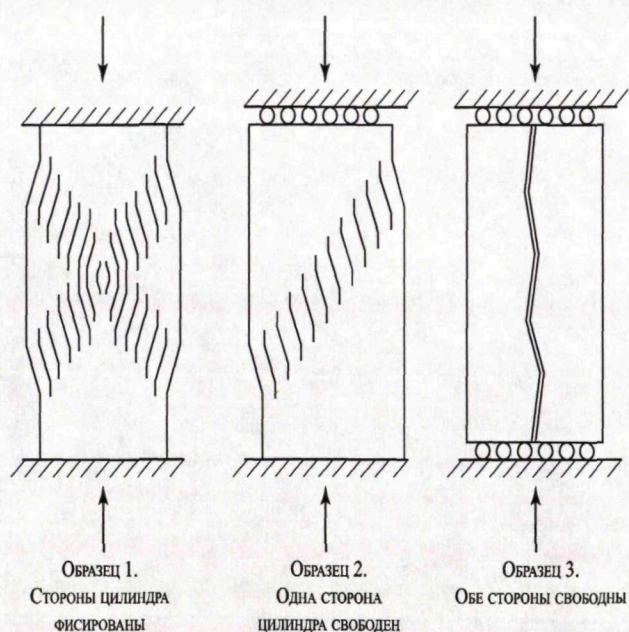


Рисунок 3.20. Полученные расчетные зависимости «инженерные напряжения – инженерные деформации»

### 3.3.3. Испытание бетонного цилиндра на сжатие

Осевое сжатие цилиндрических образцов – одно из основных испытаний по определению прочностных свойств бетонов на сжатие. Данный опыт интересен также тем, что при различных граничных условиях по концам образцов проявляется различная картина разрушения.

Задача моделируется в объемной постановке. Размеры цилиндра по высоте 305 мм, в диаметре – 152 мм. Используемые объемные элементы имеют одну точку интегрирования. Пластины пресса моделируются с помощью жестких элементов (материал \*MAT\_RIGID). Используемые модели бетона: \*MAT\_CSCM\_CONCRETE (расчетная модель 1) и \*MAT\_WINFRITH\_CONCRETE (расчетная модель 2). Прочность бетона на сжатие принимается равной 30 МПа. Исследование производилось для двух типов граничных условий представленных на рисунке 3.21. Оценивались картины разрушения образцов и критические нагрузки.



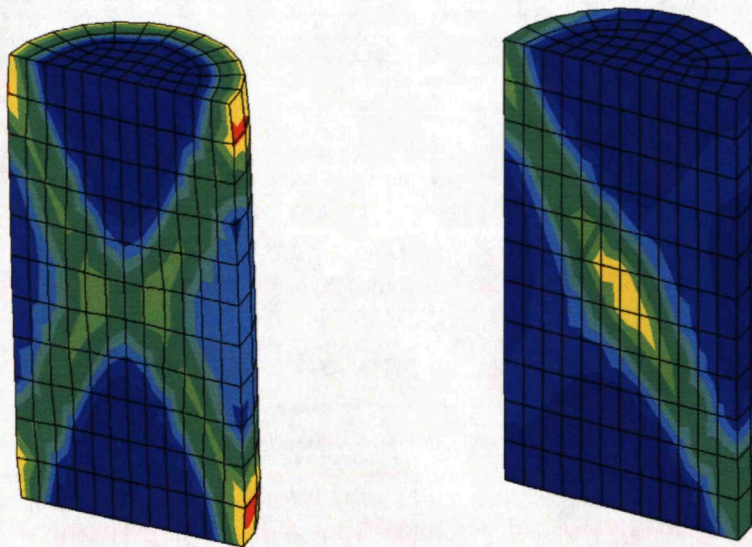
*Рисунок 3.21. Схема разрушения бетонного цилиндра в зависимости от граничных условий*

*Результаты:*

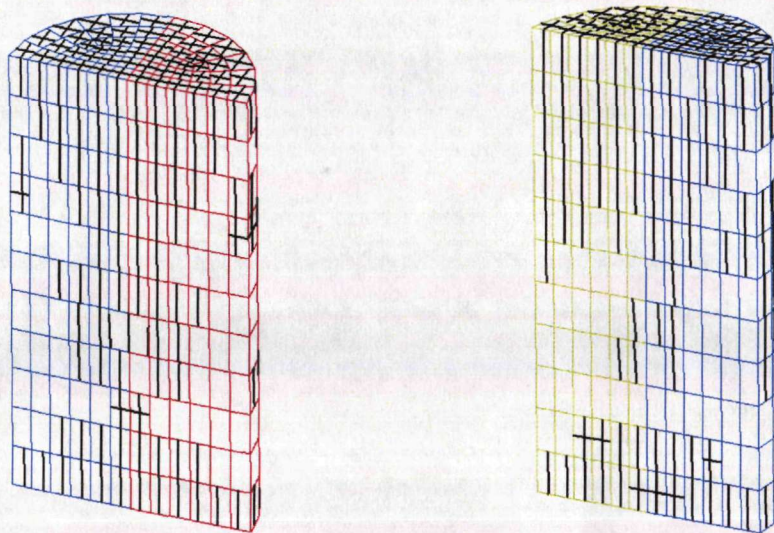
По результатам численного моделирования получена сходная с теоретической картина разрушения цилиндрических бетонных образцов (см. рис. 3.21-3.23). Проведенное сравнение критических нагрузок разрушения для ряда моделей материалов показало разброс значений в интервале от 1 до 5 % (см. табл.3.6)

*Таблица 3.6. Сопоставление результатов*

<i>Опыт</i>	<i>Теория</i>	<i>Павлов А. С. (модель 1)</i>	<i>Павлов А. С. (модель 2)</i>
Разрушающая нагрузка	547 кН	552.5 кН	574 кН
Расхождение с результатами опыта	—	1 %	5.01 %



*Рисунок 3.22. Модель CSCM. Картина развития пластических деформаций. Образец 1 и 2 соответственно (показана половина модели)*



*Рисунок 3.23. Модель бетона Winfrith. Трещинообразование. Образец 1 и 2 соответственно (показана половина модели)*

#### *3.2.4. Балка Озбольда-Базанта*

Для оценки работы моделей бетона на изгиб воспроизведен опыт Озбольда-Базанта (1991 г.). Рассмотрена шарнирно опертая бетонная балка с размерами сечения 500x100 мм, воспринимающая изгибные воздействия от сосредоточенной нагрузки по центру пролета. Армирование балки не устанавливается.

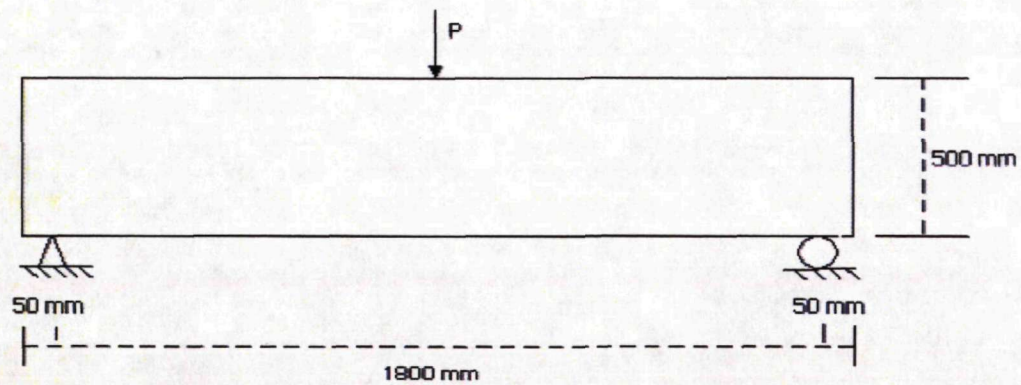


Рисунок 3.24. Схема опыта Озбольда-Базанта

В рамках тестирования применялись две модели бетона \*MAT\_CSCM\_CONCRETE и \*MAT\_WINFRITH\_CONCRETE. Прочность на сжатие принята равной 30.0 МПа.

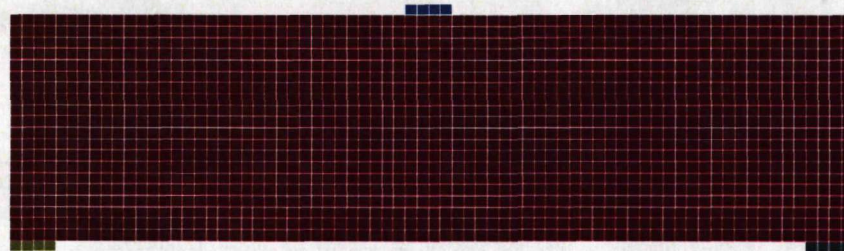


Рисунок 3.25. Расчетная LS-DYNA схема

Нагружающий и опорные элементы моделируются с помощью жестких тел (модель материала \*MAT\_RIGID). Между жесткими телами и моделью балки вводился контакт типа «поверхность-поверхность» с учетом коэффициента трения «бетон-сталь», равного 0.3.

Нагружение конструкции производилось в два этапа. На первом этапе прикладывалась гравитационная составляющая, на втором – нагрузка от испытательного стенда.

#### Результаты:

Критическая нагрузка разрушения бетонной балки в опыте Озбольда-Базанта составила 30 кН. По результатам численного моделирования опыта получены сходные значения критической нагрузки: 32 и 32.5 кН для моделей CSCM и Winfrith, соответственно. На рисунке 3.26 представлена зависимость

нагрузка перемещения с указанием опытными и модельными данными, а на рисунке 3.27 – картина разрушения образца.

Таблица 3.7. Сопоставление величин критических нагрузок

Модель	Эксперимент	*MAT_CSCM_CONCRETE	*MAT_WINFRITH_CONCRETE
Предельная нагрузка	30 кН	32.0 кН	32.5 кН
Расхождение с результатами моделирования	—	6.67 %	8 %

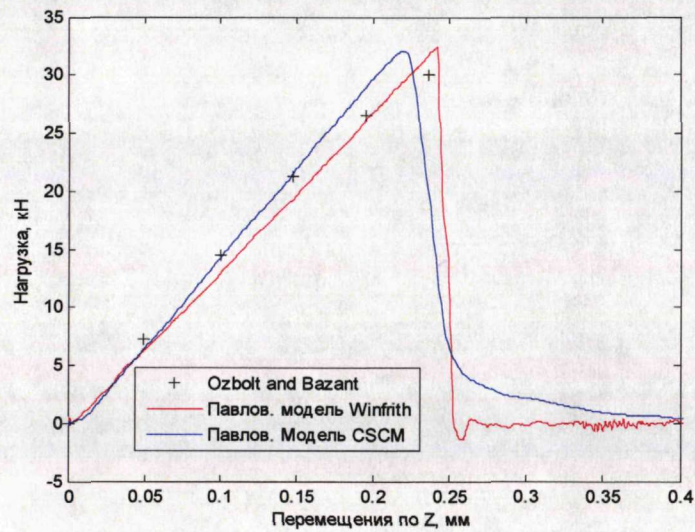


Рисунок 3.26. Зависимость «нагрузка-перемещения» для модели «балка Озбольда-Базанта»

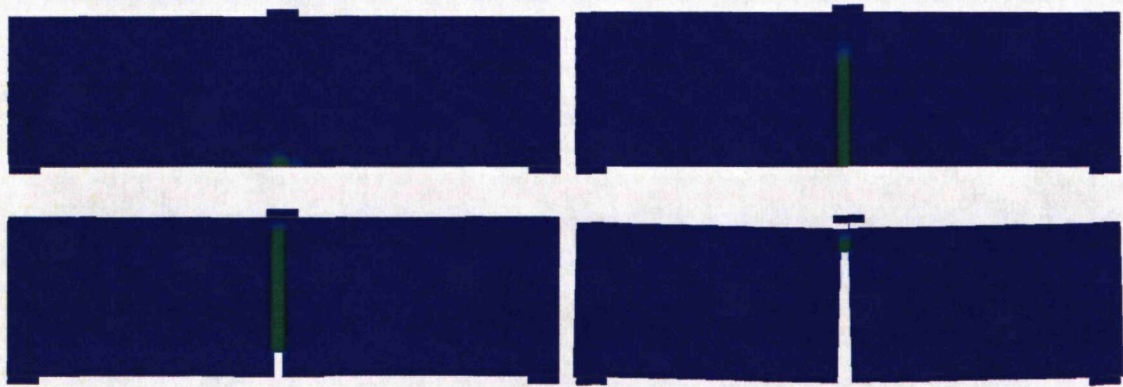


Рисунок 3.27. Поэтапное нагружение балки

### 3.2.5. Балка Бреслера и Скорделиса

Балка Бреслера и Скорделиса – классический опыт по испытанию несущей способности железобетонных балок. Схема опыта представлена на рисунке 3.28. Балка опирается шарнирно по двум сторонам. Монотонно возрастающая нагрузка прикладывается в центре балки.

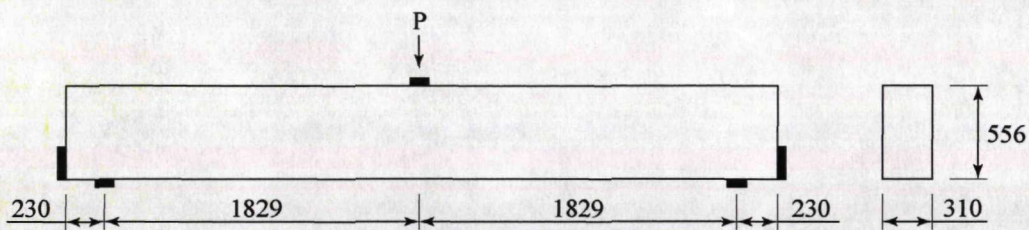


Рисунок 3.28. Схема испытываемой балки

Армирование балки представлено двумя слоями нижнего продольного армирования. Каждый слой представляет собой два стержня диаметром 28.7 мм.

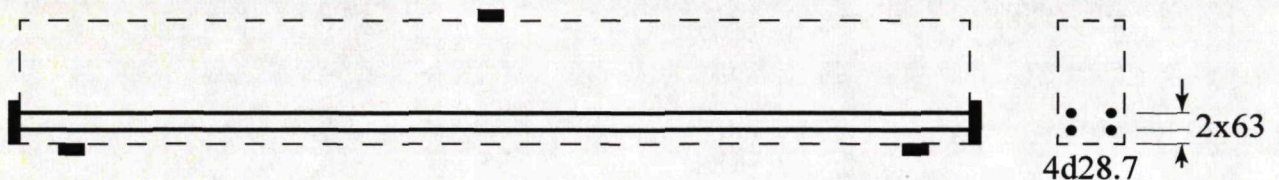
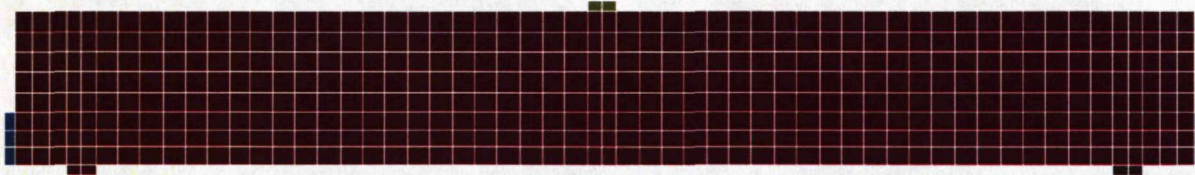


Рисунок 3.29. Схема армирования



Моделирование бетонной части балки производилось объемными элементами, арматура моделировалась стержневыми ферменными элементами.



*Рисунок 3.30. Расчетная модель балки Бреслера и Скорделиса*

Используемая модель бетона – \*MAT\_CSCM\_CONCRETE. Прочность на сжатие для бетона принята равной 22.6 МПа. Нелинейное поведение стали учитывалось введением в модель билинейного пластического материала, поддерживающего кинематическое упрочнение (\*MAT\_PLASTIC\_KINEMATIC). Предел текучести для арматуры принят равным 553 МПа.

Опорные узлы и узлы приложения нагрузки выполнялись в виде жестких тел. Между жесткими телами и моделью балки вводился контакт типа «поверхность-поверхность» с учетом коэффициента трения «бетон-сталь» 0.3.

Нагружение конструкции производилось в два этапа. На первом этапе прикладывалась гравитационная составляющая, на втором – нагрузка от испытательного стенда.

*Результаты:*

В результате проведенного численного моделирования получены близкие к экспериментальным критические нагрузки разрушения железобетонной балки (см. таблицу 3.8). Расхождение значений составило 3.4 %.

*Таблица 3.8. Сопоставление величин критических нагрузок*

<i>Модель</i>	<i>Эксперимент</i>	<i>*MAT_CSCM_CONCRETE</i>
<i>Предельная нагрузка</i>	<i>332 кН</i>	<i>321 кН</i>
<i>Расхождение с результатами моделирования</i>	<i>3.4 %</i>	<i>–</i>

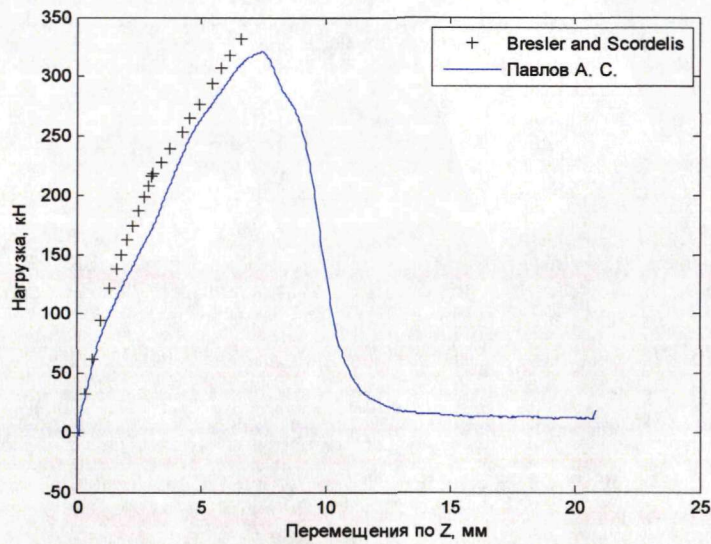


Рисунок 3.31. Зависимость «нагрузка-перемещения» вдоль Z(мм) для модели «балка Бреслера и Скорделиса»

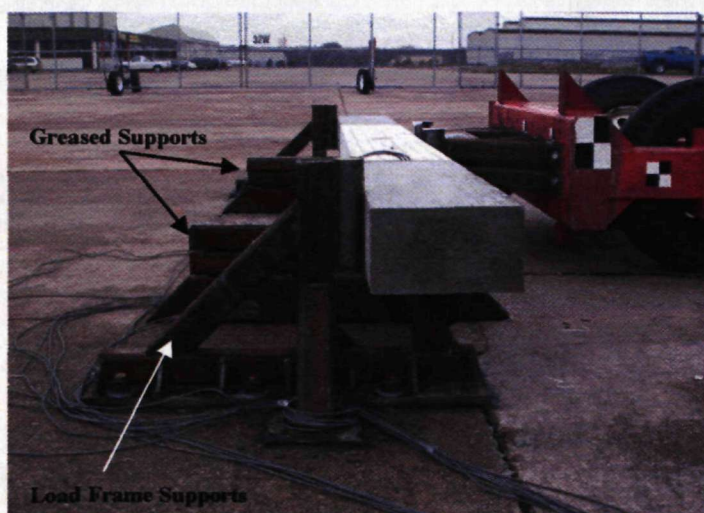
### 3.4. Динамические физически-, геометрически- и конструктивно нелинейные задачи.

#### 3.4.1. Ударное воздействие на железобетонную балку

Исследование железобетонных балок, подвергающихся ударному воздействию на различных скоростях, производилось в опытах Биленберга (Bielenberg). В рамках данного верификационного примера рассмотрим взаимодействие железобетонной балки с ударником, движущимся на скорости 33.1 км/ч. Схема опыта представлена на рисунке 3.32.



Рисунок 3.32. Схема опыта



*Рисунок 3.33. Схема опыта*

Железобетонные балки армированы двумя стержнями диаметром 19 мм с пределом текучести 462 МПа. В рамках расчета использовалась модель CSCM с пределом прочности на сжатие 46 МПа. Скорость ударника, как уже указывалось, на момент контакта с образцом составляла 33.1 км/ч.

Цилиндрические стальные ударник и опоры (диаметр 76 мм) моделируются через введение жестких тел в модель.

*Результаты:*

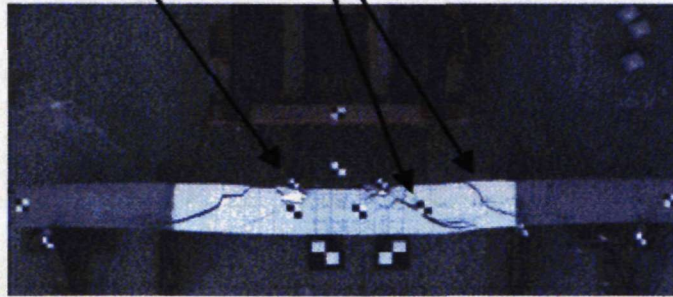
Результаты численного моделирования показали схожие картины процесса разрушения во времени с натурно зафиксированными (см. рис. 3.34 и 3.35). Процесс разрушения сопровождается дроблением зоны контакта ударником. Имеется сходное распространение диагональных трещин вдоль балки с образованием четырех-пяти трапециевидных блоков с разрушением слоя бетона вдоль армирующих элементов.

*Таблица 3.9. Сопоставление результатов*

<i>Модель</i>	<i>Эксперимент</i>	<i>Численное моделирование</i>
<i>Конечное перемещение</i>	<i>600 мм</i>	<i>570 кН</i>
<i>Расхождение с результатами моделирования</i>	<i>5.2 %</i>	—

Локализованные  
зоны разрушения

Наклонные  
сдвиговые трещины



ЖБ балка. Ударное воздействие на скорости 33.1 км/ч  
Time = 0.0080012  
Contours of Effective Plastic Strain  
min=0, at elem# 1  
max=0.999001, at elem# 12602

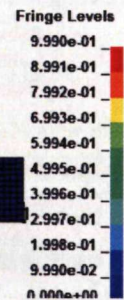
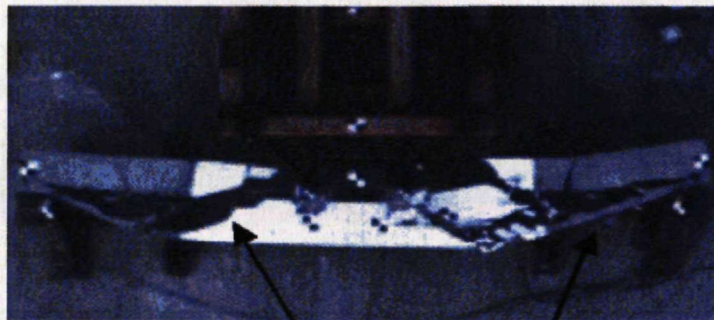


Рисунок 3.34. Разрушение тестируемой балки при ударном воздействии 33.1 км/ч. Время – 8 мс.



Наклонные  
сдвиговые трещины

Разрушение  
вдоль армирующего слоя

ЖБ балка. Ударное воздействие на скорости 33.1 км/ч  
Time = 0.048  
Contours of Effective Plastic Strain  
min=0, at elem# 1  
max=0.999001, at elem# 782

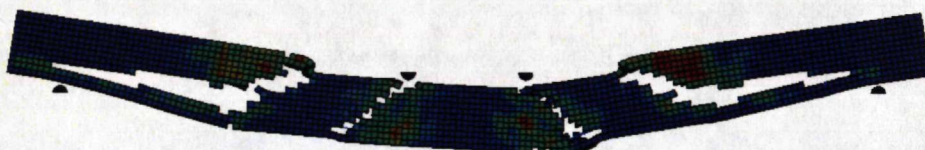
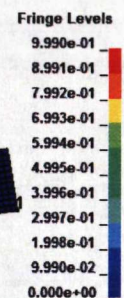


Рисунок 3.35. Разрушение тестируемой балки при ударном воздействии 33.1 км/ч. Время – 48 мс.

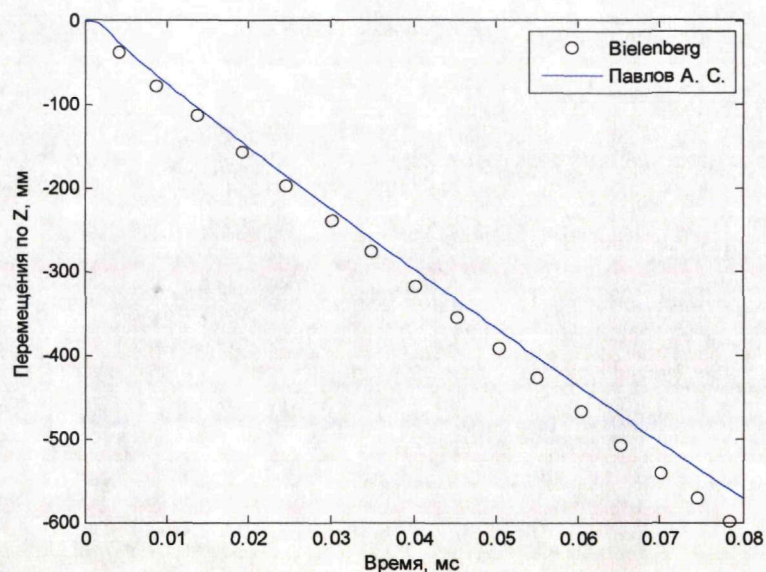


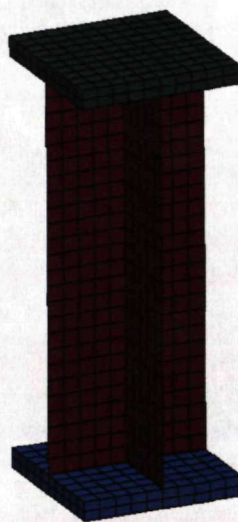
Рисунок 3.36. Зависимость перемещений (мм) от времени (мс)

#### 3.4.2. Потеря устойчивости стального стержня в результате динамического изгибного воздействия

В рамках примера производится моделирование потери устойчивости крестового стержня-колонны в результате динамически прикладываемого в верхнем узле сжимающего и поворотного воздействия. Данный пример рассматривался Соренсоном и Карлссоном.

На рисунке 3.37 представлена модель исследуемой крестовой колонны. Сечение выполнено из четырех листов 1000x200x3 мм. Для моделирования свойств стали используется материал с кинематическим упрочнением и пределом текучести 250 МПа, сходный с представленным в работе [174].

В процессе расчета вводилось контактное взаимодействие по типу «самоконттакт» (\*SINGLE\_SURFACE\_CONTACT).

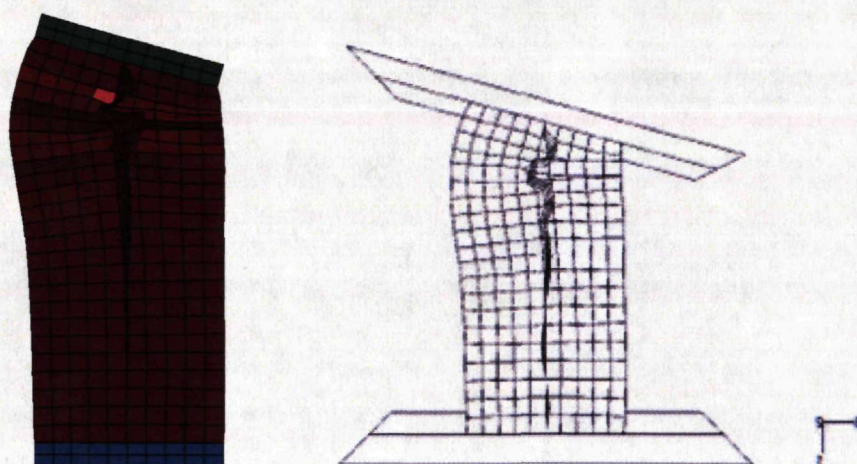


*Рисунок 3.37. Модель крестовой колонны*

Вертикальный удар по колонне производится посредством верхней пластины со скоростью 50 м/с в течение 7 миллисекунд. Также прикладывается поворотное усилие вокруг оси Y со скоростью 78.54 рад/с.

*Результаты:*

В результате проведенного моделирования получены сходные с наблюдаемыми в эксперименте формы потери устойчивости. Проведено сравнение суммарной внешней работы по всей модели, осредненное значение полученных расхождений составило порядка 1%.



*Рисунок 3.38. Форма потери устойчивости, 3 мсек*

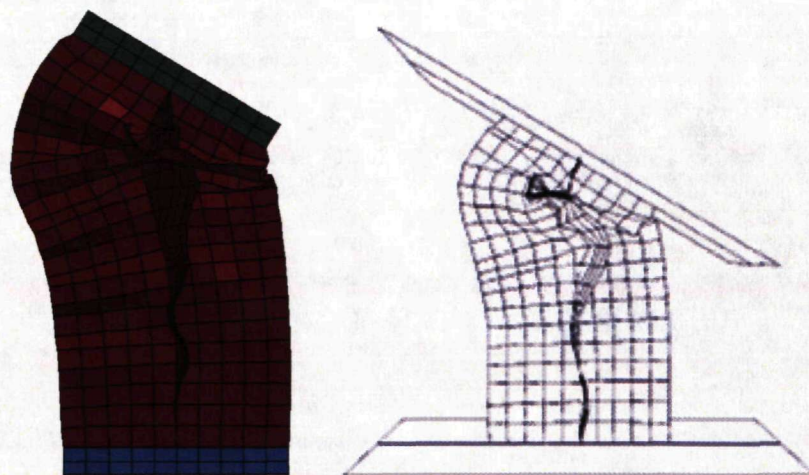
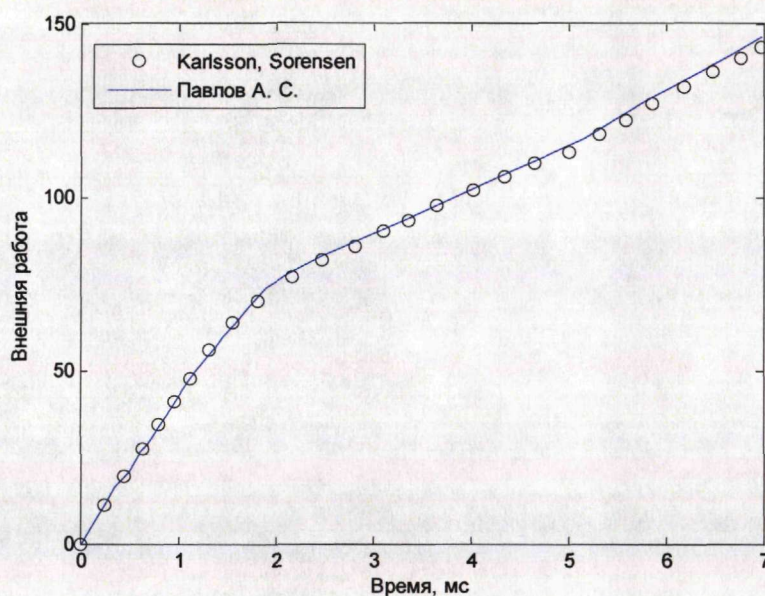


Рисунок 3.39. Форма потери устойчивости, 7 мсек



Суммарная внешняя работа по всей схеме

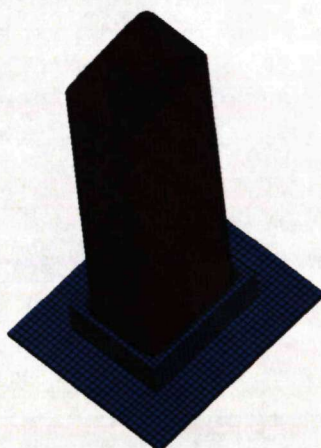
### 3.2.11. Осевое динамическое сжатие квадратной трубы

Задачи разрушения тонкостенных элементов достаточно хорошо иллюстрируют комплексные процессы деформирования, поскольку включают:

- большие деформации и перемещения
- разрушение элементов
- накопление повреждений
- «самоконтакт»

С этой точки зрения рассмотрим две работы Хупутры (Hooputra):

– осевое сжатие тонкостенной алюминиевой трубы квадратного сечения (динамическая задача удара (нагружение трубы ударником, движущимся со скоростью 10 м/с))



*Рисунок 3.40. Расчетная схема алюминиевой трубы квадратного сечения (ударник условно не показан)*

– изгиб шарнирно опертой тонкостенной алюминиевой трубы квадратного сечения (квазистатическая задача нагружения)

Материал трубы моделировался с применением кусочно-линейного изотропного материала (\*MAT\_PLASTICITY\_WITH\_DAMAGE). Опорные конструкции и ударник выполнены из жестких тел.

В процессе расчета вводилось контактное взаимодействие по типу «самоконтакт» (\*CONTACT\_SINGLE\_SURFACE) и контакт «поверхность-поверхность» (\*CONTACT\_SURFACE\_TO\_SURFACE) с коэффициентом трения 0.15 и 0.05 соответственно.

*Результаты:*

По результатам проведенного анализа составлена таблица 3.10 с приведенными значениями первых критических нагрузок для опытных и численных испытаний (в рамках диссертационного численного моделирования составила 110 кН). На рисунке 3.42 представлены сходные картины разрушения образцов.



Таблица 3.10. Сопоставление первой критической нагрузки по ряду испытаний

Модель	Hooputra (опыт)	Karlsson, Sorensen (числен- ное моделир.)	Павлов А. С.
Величина первой критической силы	105 кН	95 кН	110 кН
Расхождение с результатами моделирования, %	4.7%	15.7%	—

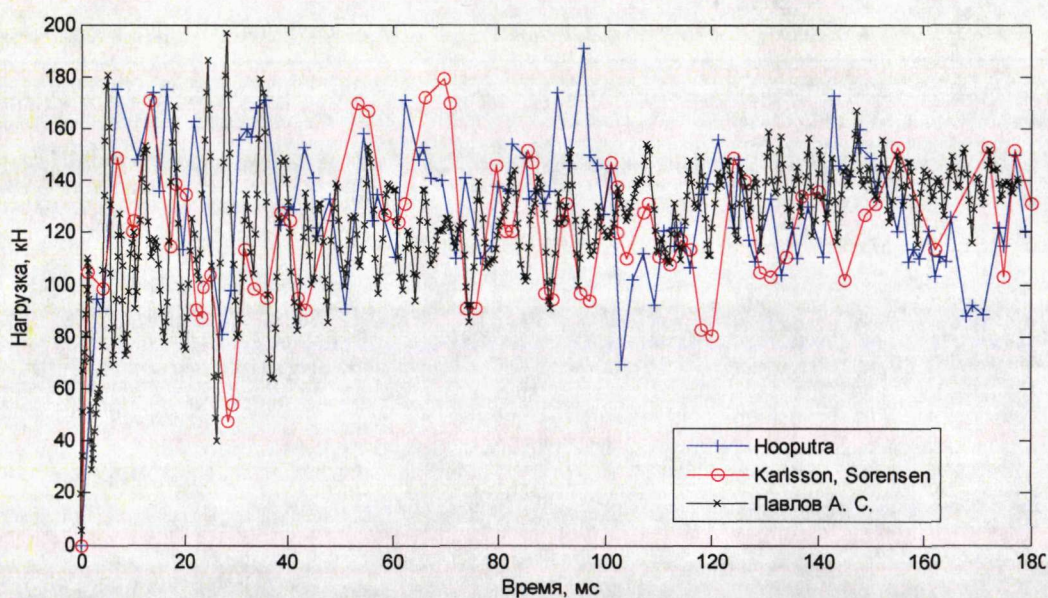


Рисунок 3.41. Изменение контактной нагрузки (кН) в процессе деформирования образца

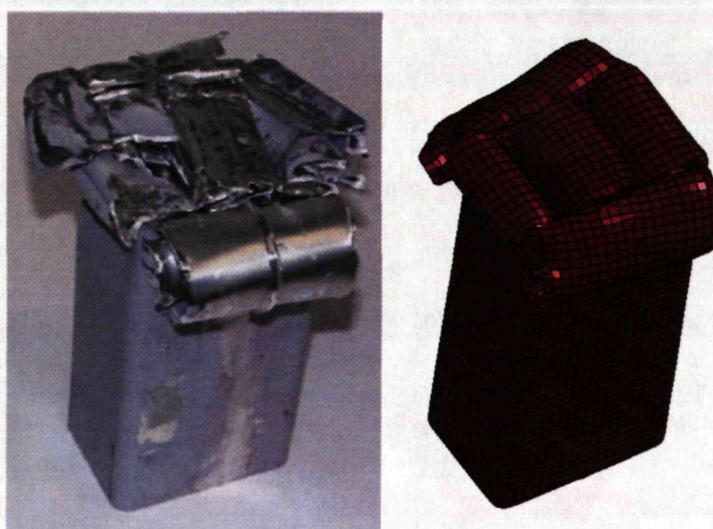


Рисунок 3.42. Картина разрушения образца (испытание и числ. моделирование)

### 3.2.12. Динамический изгиб квадратной трубы

Вторым из опытов Хупутры (Hooputra) с алюминиевыми квадратными трубами, стал динамический изгиб шарнирно опертой трубы под действием сосредоточенной нагрузки. Материалы и подходы к моделированию идентичны используемым в предыдущем параграфе.

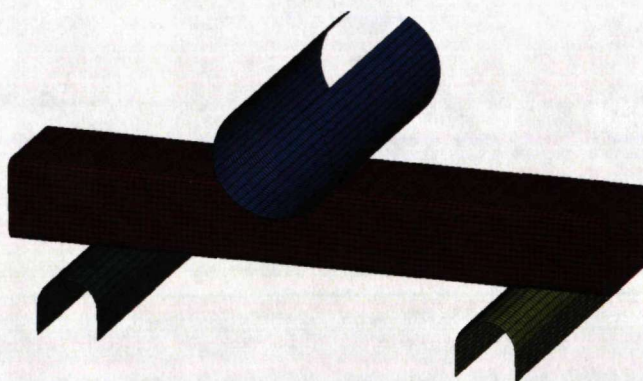


Рисунок 3.43. Расчетная схема

#### Результаты:

По результатам проведенного анализа составлена таблица 3.11 с приведенными результатами опытных и численных испытаний. Критическая нагрузка в рамках диссертационного численного моделирования составила 53.9 кН.

Таблица 3.11. Сопоставление первой критической нагрузки по ряду испытаний

Модель	Hooputra (опыт)	Karlsson, Sorensen (числен- ное моделир.)	Павлов А. С.
Величина первой критической силы	55 кН	55.5 кН	53.9 кН
Расхождение с результатами моделирования, %	1.8%	2.7%	—

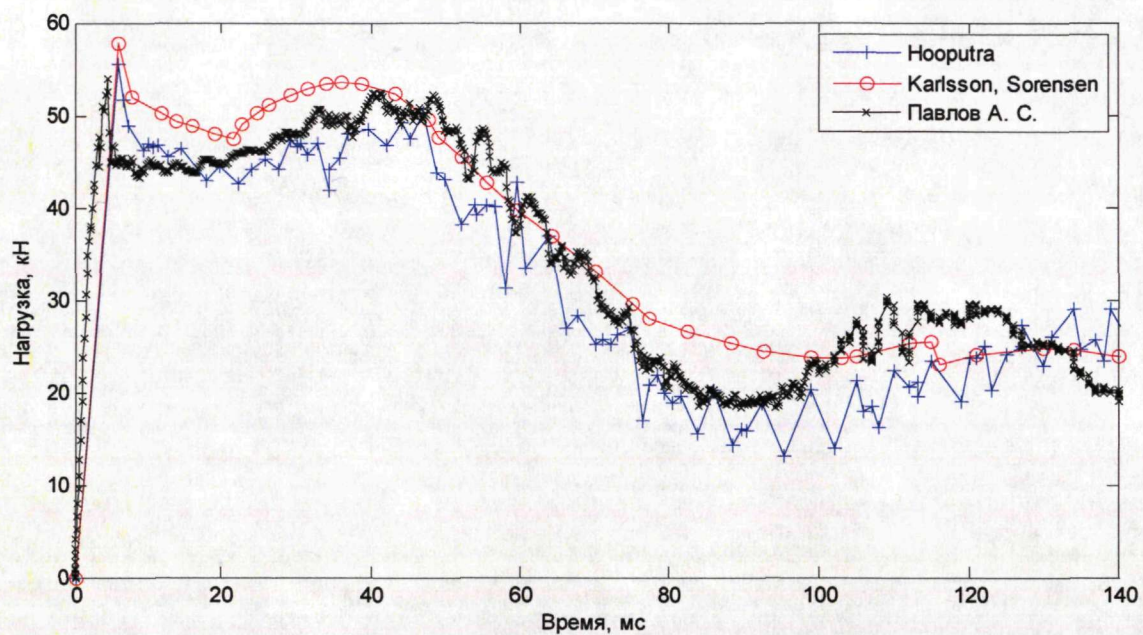


Рисунок 3.44. График изменения нагрузки с момента начала испытания

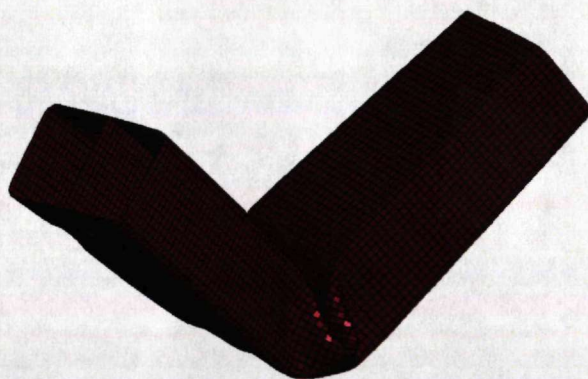
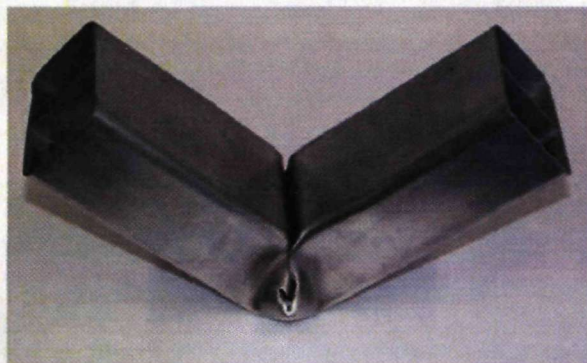


Рисунок 3.45. Форма потери устойчивости

Таблица 3.12. Сводная «матрица верификации» численной методики

№ п.п.	Наименование	«Эталонные» данные для сопоставления	Класс задач				Размерность задачи (КЭ), тип КЭ	Время счета, мин	Расхождение, %
			Геом. нелин.	Физич. нелин.	Констр. нелин.	Динамика			
1	Устойчивость «фермы Мизеса»	Bergan	+	-	-	-	3 (2d ферм.эл.)	1 мин	0.9%
2	Устойчивость пространственного геодезического купола	Hangai, Jagannathan, Papadrakakis	+	-	-	-	24 (3d ферм.эл.)	5 мин	0.22–0.5%
3	«Петля Уильямса», устойчивость А-рамы	Williams, Zienkiewicz	+	-	-	-	10 (3d стержн.)	2 мин	6%
4	Осевое сжатие круговой цилиндрич. оболочки	Priyadarsini	+	-	-	-	4869 (3d оболоч.)	6 мин	0.3%
5	Испытание стального образца на растяжение	Г.А. Филиппов	-	+	-	-	26976 (3d объемн.)	2 мин	2-10%
6	Испытание стального образца на сдвиг	Feucht	-	+	-	-	23040(3d объемн.)	2 мин	2.5-12%
7	Испытание бетонного цилиндра на сжатие	Bazant, Schwer	-	+	+	-	3432(3d объемн.)	2 мин	1-5%
8	Бетонная балка Озбольда-Базанта	Ozbolt, Bazant	-	+	+	-	18589 (3d объемн.)	3 мин	6%
9	Железобетонная балка Бреслера и Скорделиса	Bresler, Scordelis	-	+	+	-	19865 (3d объемн.)	3.5 мин	3.4 %
10	Ударное воздействие на железобетонную балку прямоугольного сечения	Bielenberg	+	+	+	+	14224 (3d объемн.)	10 мин	5.2%
11	Потеря устойчивости стального стержня в результате динамического изгибного воздействия	Karlsson, Sorensen	+	+	+	+	900 (3d оболоч.)	1 мин	1%
12	Осевое динамическое сжатие квадратной трубы	Karlsson, Sorensen	+	+	+	+	14600 (3d оболоч.)	9 мин	4.7-15.7%
13	Динамический изгиб квадратной трубы	Karlsson, Sorensen	+	+	+	+	14600 (3d оболоч.)	10 мин	1.8-2.7%

### **Выводы по главе 3:**

1. Проведена верификация методики расчетов задач нелинейных процессов деформирования и разрушения на представительном наборе квазистатических и динамических тестовых примеров с геометрической, физической и конструктивной нелинейностями.

2. По результатам решения верификационных статических и динамических задач получены картины деформирования, потери устойчивости и разрушения моделируемых образцов и конструкций, близкие к «эталонным» экспериментальным и теоретическим данным.

3. На физически нелинейных задачах проведен отбор библиотеки материалов для разрабатываемого программного модуля.

## ГЛАВА 4. ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПРОГРАММНЫЙ МОДУЛЬ INTERDYN

### 4.1. Общее описание программного модуля

По результатам оценки программных комплексов нелинейного динамического анализа, представленным в *главе 2*, в качестве основного инструмента проведения расчетов выбран лицензионный ПК LS-DYNA (установлен в НОЦ КМ МГСУ).

Основываясь на том, что данный тип расчетов требует задания достаточно большого числа опций, указания различных свойств материалов, граничных условий и параметров расчета, целесообразно для повышения эффективности подготовки моделей и сведения к минимуму ошибок в процессе ввода пользователем формировать входной текстовый файл в автоматизированном программном интерфейсе.

С этой целью разработан исследовательский программный модуль *InterDYN*, работающий под управлением систем класса Windows. В качестве среды разработки использовалась Microsoft Visual Studio, язык программирования – C#, разработанный пользовательский интерфейс – русскоязычный.

Структура работы программного модуля InterDYN имеет следующий вид (см. рис. 4.1).

С помощью сеточного генератора разрабатывается конечноэлементная сетка с присвоенными атрибутами материалов, жесткостей, групп элементов и узлов. В качестве сеточного генератора могут выступать программные комплексы ANSYS, СТАДИО, Лира, SCAD.

Для программных комплексов СТАДИО, Лира, SCAD разработаны консольные модули преобразования текстовых файлов во входной нейтральный файл InterDYN. Создание входного файла из программного комплекса ANSYS производится напрямую с помощью специально написанного макроса. В дальнейшем файл импортируется в программный интерфейс InterDYN для последующей обработки модели.

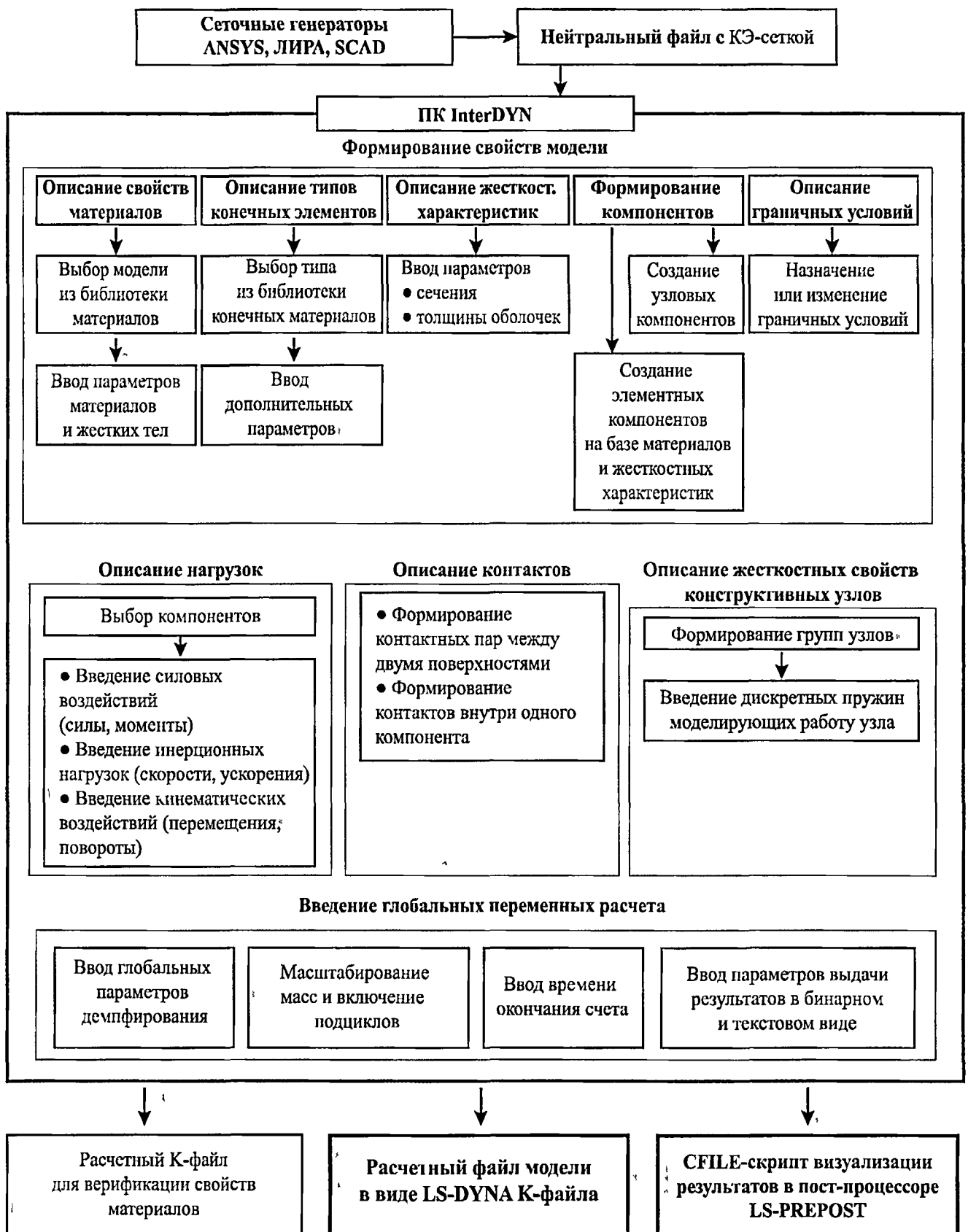


Рисунок 4.1. Схема работы программного модуля InterDYN

## 4.2. Структура нейтрального файла InterDYN

Нейтральный файл InterDYN – это структурированный текстовый файл с явным выделением блоков данных с применением специальных текстовых меток открытия и закрытия раздела. Такой подход создает гибкую, логически организованную и простую для понимания базу данных.

Данный файл *не включает* информацию о свойствах материалов и жесткостях, только конечноэлементную сетку, присвоенные ей номера атрибутов (материалы, жесткости), элементные и узловые группы-компоненты, узловые и равномерно распределенные нагрузки.

Каждый блок базы данных открывается и закрывается с помощью специальных меток (закрывающая метка отличается от открывающей наличием приставки «End\_»).

\*PROJECT\_NAME

«блок данных»

\*END\_PROJECT\_NAME

Каждая таблица блока данных состоит из 8 столбцов шириной 10 символов (одна стандартная ячейка состоит из 10 символов). Максимальный размер целого числа ограничен значением 99999999.

Таблица 4.1. Основные разделы входного файла InterDYN

Метка	Функция
*PROJECT_NAME	Вводится название проекта. Используется одно поле длиной 80 символов:
*NODES	Узлы. Используются 6 ячеек по 10 символов: первая – номер узла в формате целого числа, следующие три ячейки – декартовы координаты X, Y, Z в вещественном виде, последние две ячейки – накладываемая группа ограничения степеней свободы по смещению и повороту. 0 – нет ограничений 1 – смещение ограничено относительно x 2 – смещение ограничено относительно y 3 – смещение ограничено относительно z



Метка	Функция
	<p>4 – смещения ограничены относительно x и y            5 – смещения относительно y и z            6 – смещения ограничены относительно z и x            7 – закрепление по трем направлениям.</p>
*ELEMENTS_SOLID	<p><i>Объемные элементы.</i> Структура таблицы 10 столбцов по 8 символов: номер элемента, узел 1, ..., узел 8 (если элемент содержит меньше узлов, то свободные ячейки заполняются нулями), номер материала.</p>
*ELEMENTS_SHELL	<p><i>Оболочечные элементы.</i> Блок состоит из номеров элементов, узлов 1, ..., 4 (если элемент содержит меньше узлов, то свободные ячейки заполняются нулями), номеров материалов; жесткостей.</p>
*ELEMENTS_BEAM	<p><i>Стержневые элементы.</i> Блок состоит из номеров элементов, узлов 1, 2, 3 (если есть для ориентации), номеров материалов, жесткостей, углов поворотов сечения (при отсутствии узла 3)</p>
*ELEMENTS_LINK	
*ELEMENTS_SPRING	<p>Блок <i>пружинных элементов</i>: номер элемента, узел 1, узел 2, номер материала, жесткости; тип пружины (0 - перемещения; 1 - повороты)</p>
*LOADS_NODES	<p><i>Узловые нагрузки.</i> Задаются: номер узла, величина нагрузки (если указано со знаком минуса, то номер группы значений нагрузок) тип нагрузки (0 – сила, 1 – момент), направление (0 – X, 1 – Y, 2 – Z). Нагрузки прикладываются в глобальной системе координат</p>
*LOAD_UNIF_SHELLS	<p><i>Равномерно распределенные нагрузки на оболочечные элементы.</i> Задаются:          Номер элемента, величина нагрузки (если указано со знаком минуса, то номер группы значений нагрузок), метка системы координат приложения нагрузки (0 – глобальная, 1 – локальная), метка направления приложения (0 – X, 1 – Y, 2 – Z, при использовании локальной системы координат учитываются только значения с меткой 2)</p>

Метка	Функция
*LOAD_VALUES	Блок значений нагрузок. Задаются: Номер группы нагрузок, значение нагрузки
*COMPONENT_NODES	Блок компонентов. Структура таблицы 10 столбцов по 8 символов. Каждая строка состоит из: номера группы, числа узлов в группе, номера узла (элемента) 1, ..., номера узла (элемента) 8
*COMPONENT_BEAMS	
*COMPONENT_SHELLS	
*COMPONENT_SOLIDS	
*COMPONENT_SPRINGS	

На основании входного файла производится заполнение внутренней базы данных и дальнейшая обработка модели.

### 4.3. Функции программного модуля

Программная оболочка модуля InterDYN представляет собой оконное приложение. Основной экран (см. рис. 4.2) разделен на две части: левая – дерево свойств модели и параметров расчета (по двойному нажатию или через правый клик вызывается окно соответствующих свойств), правая – окно генерируемого программного кода (расчетный файл, визуализация, статистика по модели).

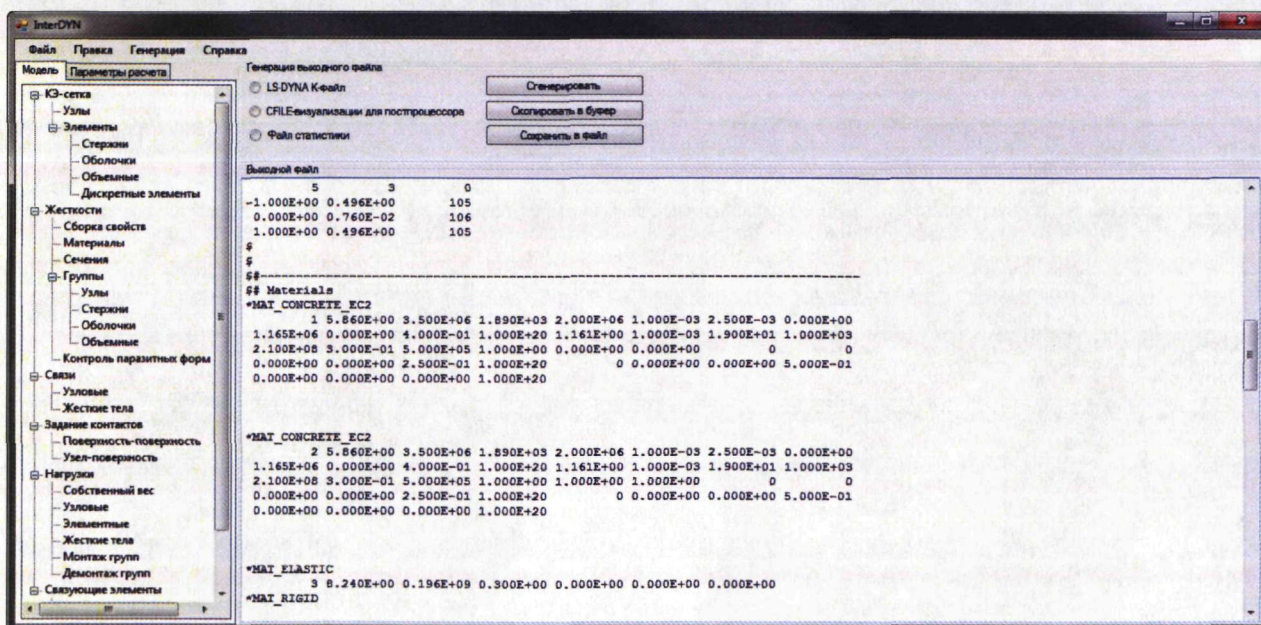


Рисунок 4.2. Основной экран InterDYN

Дерево свойств модели состоит из ряда разделов:

- *КЭ-сетка*. Включает таблицы узлов и элементов
- *Жесткости*. Включает ряд подразделов:

– *Сборка свойств*. В разделе формируется комплексные «наборы» свойств: вид элементов, номера материалов, сечений, контроль паразитных форм элементов. При импорте нейтрального файла происходит автоматическая группировка и сортировка наборов свойств.

– *Материалы*. В табличной форме определяются типы и модели материалов, вызывается меню заполнения свойств материала (см. рис. 4.3 и 4.4).

В качестве основных моделей материалов представлены:

- Для металлов модели материалов с изотропным и кинематическим упрочнением поддерживающих опции разупрочнения
- Для бетонных и железобетонных конструкций: бетон Winfrith, бетон CSCM, CONCRETE\_EC2-модель (для оболочек и стержней Hughes-Liu)
- Модель нелинейно-упругих изотропных резиноподобных материалов Mooney-Rivlin

Материал	Тип материала	Модель материала	Плотность	Свойства	Примечание
1	Металлы	PLASTIC_KINEMATIC	7.85		
2	Металлы	PLASTIC_KINEMATIC	7.85		
3	Бетон	CSCM	2.5		
4	Бетон	CSCM	2.5		
5	Жесткое тело		7.85		
6	Жесткое тело		7.85		
7	Жесткое тело		7.85		
8	Жесткое тело		7.85		
9	Жесткое тело		7.85		
10	Жесткое тело		7.85		
11	Жесткое тело		7.85		
12	Жесткое тело		7.85		
13	Жесткое тело		7.85		
14	Жесткое тело		7.85		
15	Бетон	CSCM	2.5		
16	Металлы	PLASTICITY_WITH_DAMAGE	7.85		
17	Жесткое тело		7.85		

Рисунок 4.3. Таблица материалов

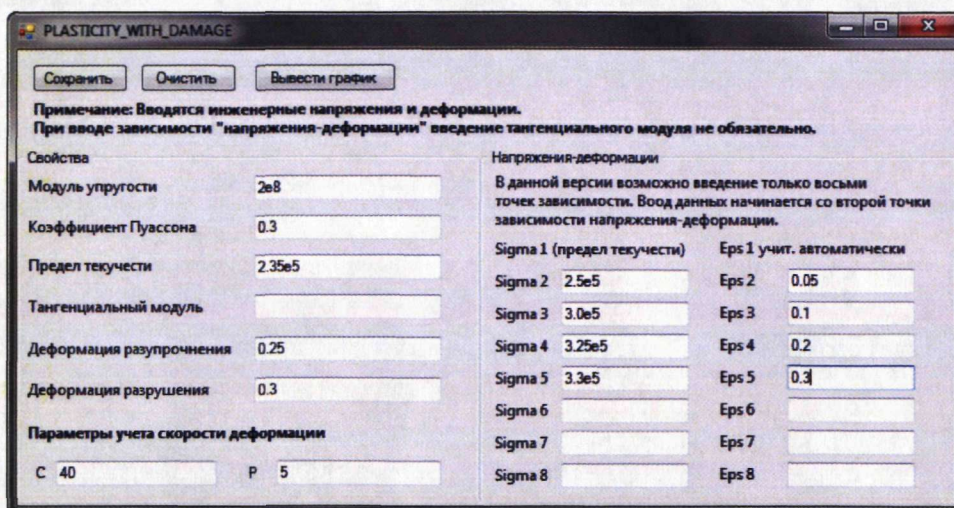


Рисунок 4.4. Окно заполнения свойств материала

– Сечения. В разделе задается номер сечения, тип конечного элемента (оболочка или стержень), характеристики сечения (для оболочек – толщина, число слоев, для стержней – форма сечения и его параметры), смещение сечения.

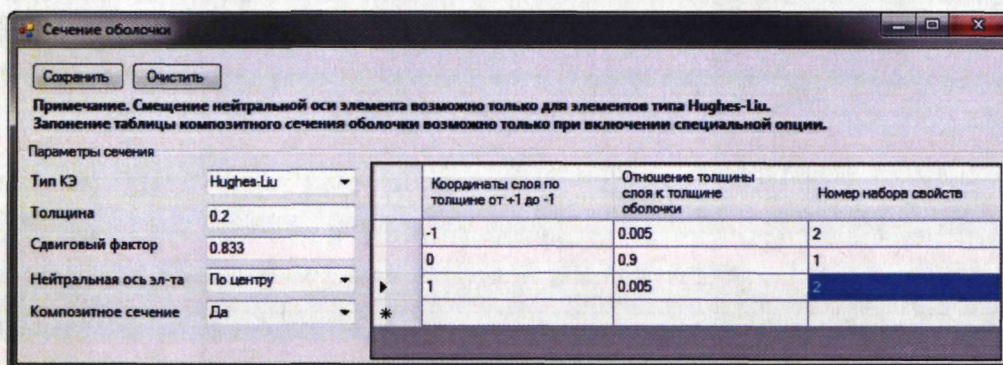


Рисунок 4.5. Параметры сечения оболочки

Таблица 4.2. Поддерживаемые типы КЭ на уровне ПК InterDYN

Тип элемента	Наименование
Объемные (8-ми узловые)	Hallquist
	Flanagan-Belytschko
	Wilkins
Оболочечные	Belytschko-Tsay
	Hughes-Liu

Тип элемента	Наименование
Балочные	C <sup>0</sup> (треугольная оболочка)
	Belytschko-Tsay (мембрана)
	Hughes-Liu (задается сечение)
	Belytschko-Schwer (задаются жесткостные характеристики сечения)

– Формирование групп-компонентов узлов и элементов, используемых в дальнейшем для приложения нагрузок и граничных условий.

- *Связи.* В данном разделе выставляются и модифицируются кинематические граничные условия для узлов (в том числе и упругих), групп узлов и жестких тел.

- В рамках программного модуля реализована подготовка данных для введения контактных взаимодействий двух типов: поверхность-поверхность и узел-поверхность. Реализованы следующие опции: склеивающий контакт, для которого задаются критические отрывающие и сдвигающие напряжения (усилия), «самоконтакт» – контакт элементов, находящихся в одной группе.

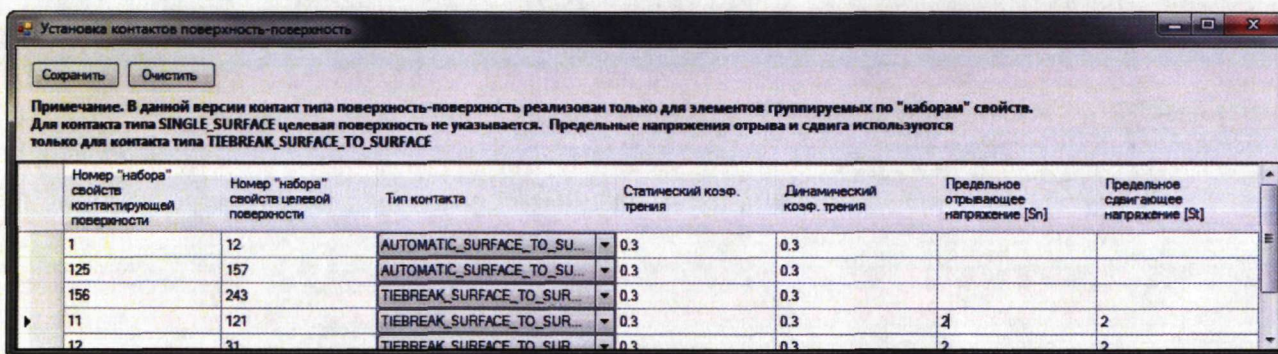


Рисунок 4.6. Окно заполнения свойств для контактов типа «поверхность-поверхность»

- Введение или модификация нагрузок:
  - *Собственный вес.* Выборочное приложение гравитации для групп элементов.
  - *Узловые нагрузки,* в том числе и на группы узлов: силы, моменты, ускорения, скорости, перемещения.

- *Элементные нагрузки*: ускорения и скорости для групп элементов, поверхностное давление на оболочечные элементы.
- *Нагрузка на жесткие тела*: силы и моменты, прикладываемые к центру тяжести группы элементов.
- *Монтаж и демонтаж групп элементов*. Реализация стадийности возведения и демонтажа конструкций.
- *Сопряжение элементов*. Создание или модификация узловых стыков в виде пружинных элементов с отражение реальных жесткостных характеристик конструктивного узла на основе имеющихся расчетов.

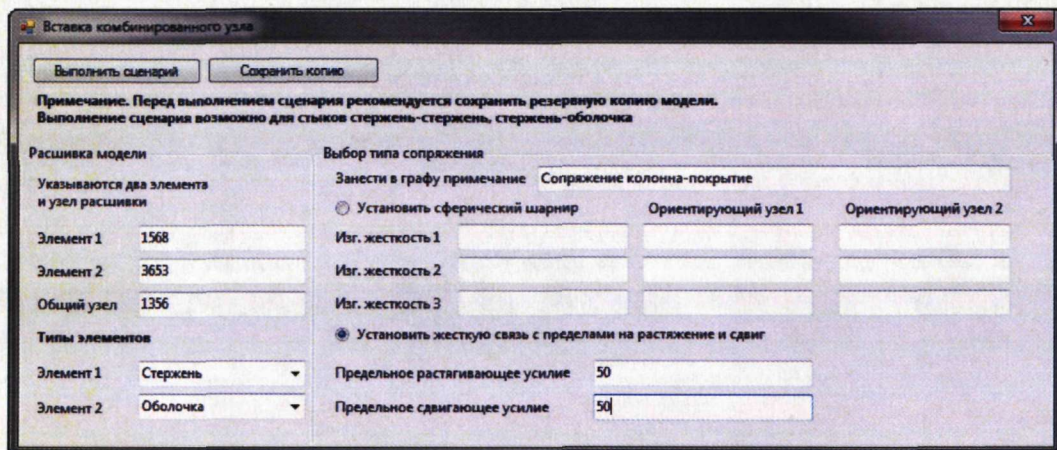


Рисунок 4.7. Установка комбинированного узла

- *Шарнирное сопряжение* типа стержень-стержень и стержень оболочка
- *Жесткие связи* типа узел-узел (стержень-стержень, стержень-оболочка) и оболочка-оболочка (сварное соединение), сварные соединения.
- *Упругоподатливые связи* типа стержень-стержень и стержень-оболочка через введение дискретных пружинных элементов.

Номер связи	Узел 1	Узел 2	"Набор" свойств	Вектор действия задать через узлы 1 и 2	Вектор действия задать через узлы 3 и 4	Ориентир. узел 3	Ориентир. узел 4	Компонент вектора действия элемента по X	Компонент вектора действия элемента по Y	Компонент вектора действия элемента по Z	Примечание
1	1	2	5 (Перем...	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
2	3	4	5 (Перем...	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
3	5	6	5 (Перем...	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
4	7	8	6 (Повор...	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			1	0	0	
5	9	10	5 (Перем...	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
6	11	12	5 (Перем...	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
7	13	14	5 (Перем...	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
8	15	16	6 (Повор...	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			0	1	0	
9	17	18	6 (Повор...	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			0	1	0	
10	19	20	5 (Перем...	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						

Рисунок 4.8. Заполнение свойств упругоподатливых связей

● На закладке «параметры расчета» (см. рис. 4.1) выставляются следующие параметры:

– Время окончания расчета

– Параметры расчета контактных взаимодействий

– Зависимость коэффициента демпфирования от момента времени

– Коэффициенты масштабирования масс и понижения максимально допустимого шага интегрирования во времени

– Выбор метода определения критического шага по времени

● Отдельным пунктом введено автоматизированное составление тестовых примеров для испытания стальных образцов на растяжение, сдвиг, для бетонных образцов – испытание цилиндров на сжатие.

● На выходе создаются два файла: входной K-файл для расчетного процессора LS-DYNA и CFIL-файл обработки и визуализации модели для LS-PREPOST с указанием ракурсов, сечений визуализации и генерацией данных для графиков.

#### **Выводы по главе 4:**

1. Разработан программный модуль InterDYN, позволяющий автоматизировать процесс применения разработанной методики и подготовки расчетных моделей и скриптов визуализации для базового ПК LS-DYNA.

2. Функционал программного модуля InterDYN позволяет создавать расчетные модели различных уровней сложности с развитыми геометрическими, физическими, конструктивными и генетическими нелинейностями.

3. Программный модуль реализует возможность автоматизированной модификации входной КЭ-схемы для детального моделирования действительных схем работы узлов.

## ГЛАВА 5. «РЕТРОСПЕКТИВНОЕ» МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ БОЛЬШЕПРОЛЕТНОГО СООРУЖЕНИЯ

### 5.1. Общие данные

#### 5.1.1. Описание этапов моделирования

С целью апробации разработанной методики численного моделирования процессов деформирования и разрушения большепролетных сооружений проведено «ретроспективное» исследование НДС реальных конструктивных узлов и группы конструкций «ребристая оболочка покрытия – колонны со связями» спортивно-оздоровительного комплекса «Трансвааль-парк» в условиях нормальной эксплуатации и в закритической стадии.

Проведенное исследование можно разделить на ряд этапов:

- Предварительная оценка усилий, возникающих в элементах конструкций с помощью ANSYS-модели сооружения. На основании расчета определяются критические зоны и значимые усилия в конструкции

- На основании полученных усилий производится оценка напряженно-деформированного состояния конструктивных узлов сооружения с доведением до разрушения, оценка механизмов работы и их изменение в процессе деформирования:

- Верхний узел колонны

- Нижний узел колонны

- По результатам исследования конструктивных узлов анализируются НДС и устойчивость смежной группы конструкций:

- Колонна со связями

- С учетом проведенных испытаний оценивается общая устойчивость сооружения к конструктивным изменениям. На основании разработанной модели созданы и проанализированы пять вариаций-сценариев для различных схем работы узлов колонн:



- С дискретным (пружинным) сопряжением колонн с покрытием и основанием
- «Проектная» с шарнирным сопряжением колонн с покрытием
- Динамическое моментное воздействие в уровне стыковки покрытия с колонной 11г при изменении схемы работы узла с упругого на шарнирный
- Разрушение сварного шва, связывающего распорку Р1 с колонной 11г
- Разрушение опорных брусков колонн кольцевого ряда

### 5.1.2. Расчетные схемы, конечные элементы и модели материалов

Конечноэлементное моделирование (модели «ребристая оболочка покрытия» – колонны со связями», «верхний узел колонны», «нижний узел колонны», «колонна с распорками») производилось в программном комплексе ANSYS. Полученные КЭ-сетки посредством программного модуля InterDYN подготавливались к дальнейшему анализу в ПК LS-DYNA:

- Формировались свойства материалов
- Формировались группы жестких тел
- Выставлялись граничные условия
- Формировались элементные группы (компонентов)
- Формировались контактные пары и задавались их характеристики

В качестве основных конечных элементов принимались:

- Оболочечные элементы *Belytschko-Tsay*
- Стержневые элементы *Hughes-Liu* с интегрированием по сечению
- Объемные элементы *Hallquist*
- С учетом требований к модели железобетона, применяемой для моделирования ребристой оболочки покрытия, применялись оболочечные и стержневые элементы *Hughes-Liu*

В качестве основных моделей материалов применялись:

- Металлы – кусочно-линейная упругопластическая модель с разупрочнением (описана в главе 2)

• Железобетон ребристой оболочки покрытия – модель железобетона EC2. Модель составлена на основе нормативных документов Eurocode 2. Модель поддерживает растрескивание и крошение для бетона, текучесть и разрушение арматуры. Модель не учитывает влияние скоростей деформаций.

Кривая деформации-напряжения для участка сжатия задается следующим образом

$$\sigma_c = f_c \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \quad (5.1)$$

$$\eta(\varepsilon_c) = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad (5.2)$$

$$k = 1.1 \frac{E_c \varepsilon_{c1}}{f_c} \quad (5.3)$$

где  $f_c$  – предельная прочность бетона на сжатие в возрасте 28 дней

$\varepsilon_{c1}$  – деформация сжатия соответствующая  $f_c$

$E_c$  – начальный модуль упругости бетона

Участки разупрочнения бетона принимаются линейными как для сжатия, так и для растяжения. Общий вид зависимости напряжений от деформаций представлен на рисунке 5.1.

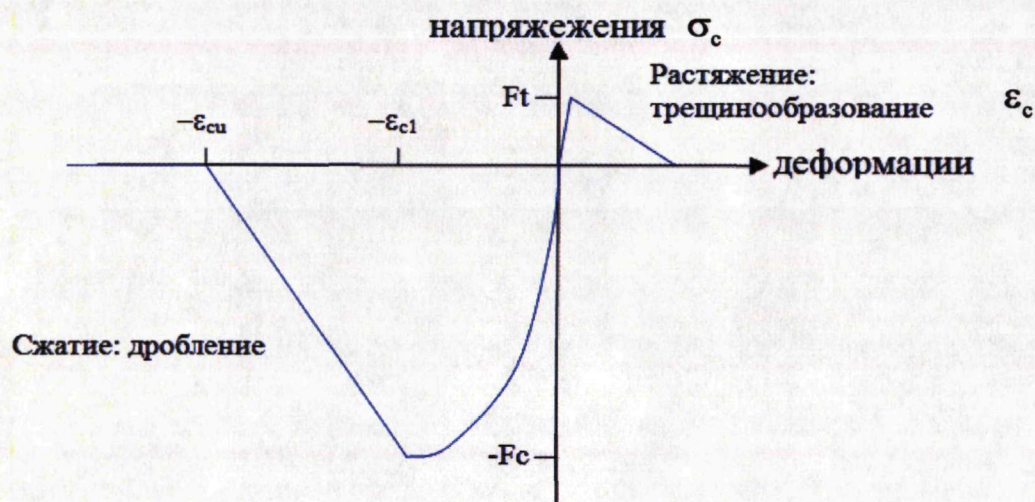


Рисунок 5.1. Зависимость напряжений от деформаций в модели EC2

На основании изучения проектной документации и экспертных заключений был составлен список материалов, применяемых в исследуемых конструкциях сооружения (см. табл. 5.1)

Таблица 5.1. Используемые материалы

Наименование узла	Элемент узла	Материал
Верхний и нижний узлы колонн	Блюмс	Сталь 30
	Металлические ребра	Сталь С245
	Пластины закладных деталей	Сталь С345
Колонна	Труба	Сталь 20
Покрытие	Бетонные элементы	В35
	Арматура	A500С, Вр-1

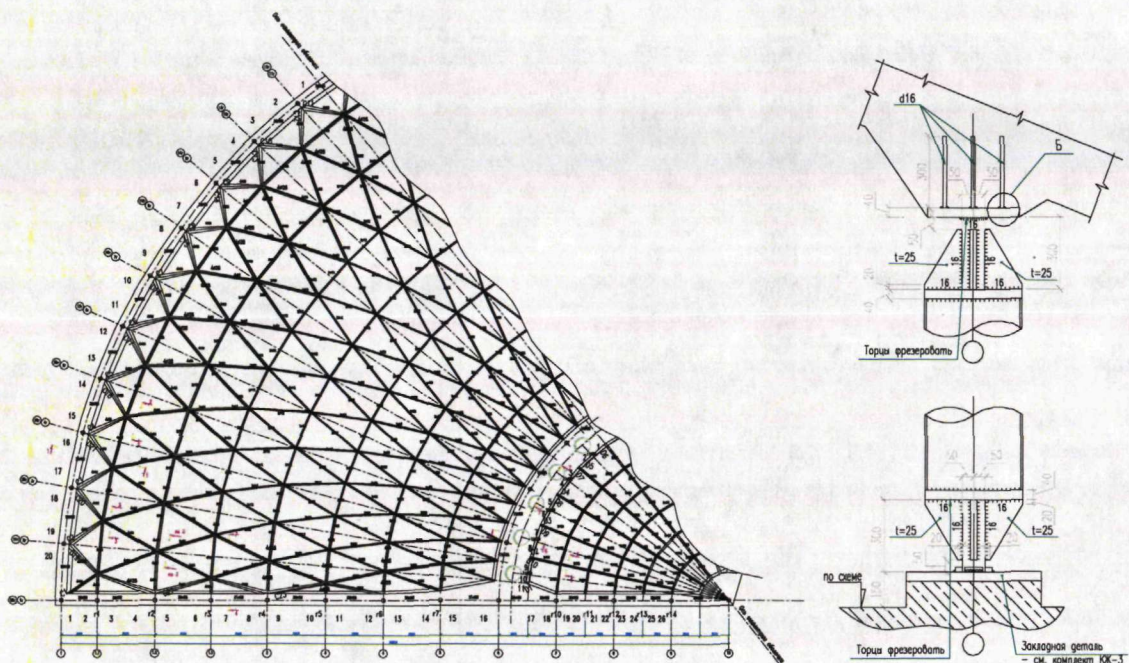


Рисунок 5.2. План и схемы исследуемых узлов конструкций

По результатам опытных испытаний материалов конструкций в рамках экспертизы причин обрушения СОК «Трансвааль-парк» составлены зависи-

мости «напряжения-деформации» для материала блюмса и сварных швов. Для остальных материалов данные зависимости приняты на основании нормативных характеристик.

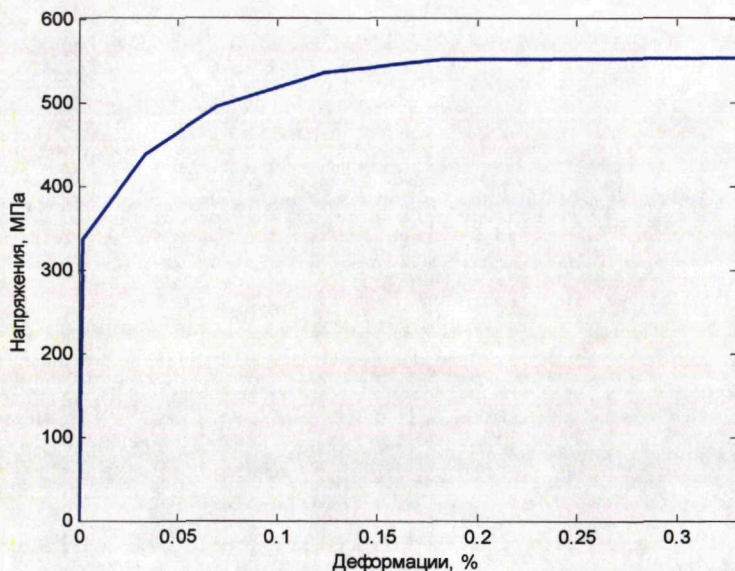


Рисунок 5.3. Зависимость напряжения-деформации материала блюмса

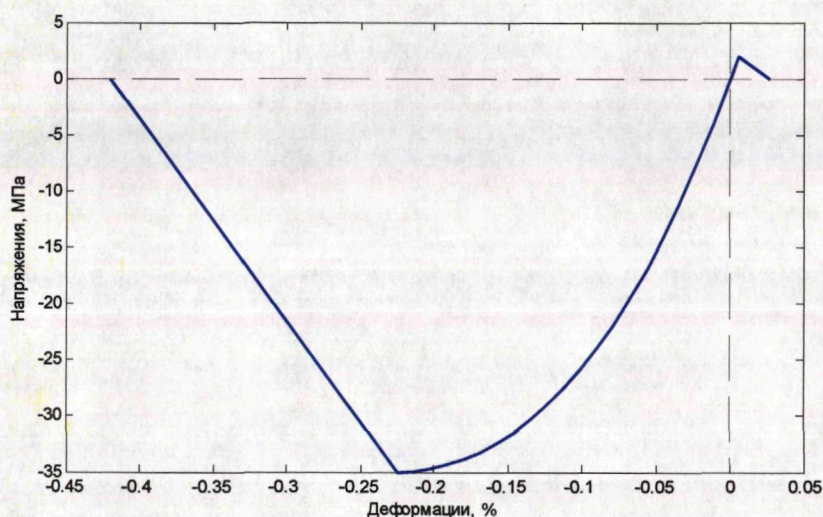


Рисунок 5.4. Зависимость напряжений от деформаций для бетона В35

Полученные напряжения и деформации были приведены на основании известных формул к истинным напряжениям и истинным деформациям для дальнейшего использования при моделировании.

### *5.1.3. Моделирование воздействий*

Нагружение конструкций в режиме нормальной эксплуатации носит последовательный квазистатический долговременный характер. Процессы же разрушения можно разделить на долговременный процесс развития и накопления пластических деформаций (также имеет по своей сути квазистатический характер) и по достижении критической массы финальный этап динамического разрушения и догрузки системы.

С этой целью, нагружение моделей разделялось на квазистатический и динамический этапы. Для сглаживания динамических эффектов на первом этапе вводилось повышенное демпфирование и последовательное равномерное введение нагрузок, при этом минимальная длительность этапа соответствовала удвоенной величине низшего периода собственных колебаний. На закритическом этапе принимались стандартные величины демпфирования.

## **5.2. Оценочный статический расчет**

### *5.2.1. Описание модели*

С целью получения «опорных» значений усилий в элементах конструкций для последующего численного исследования отдельных узлов и всей системы в целом создана и рассчитана «унифицированная» многопараметрическая оболочечно-стержневая конечноэлементная модель, с необходимой подробностью воспроизводящая все особенности геометрии и напряженно-деформированного состояния системы «ребристая оболочка – колонны со связями» для программного комплекса ANSYS.

Модель содержит 30 «материалов»/сечений, около 15 000 узлов и 20 000 стержневых и оболочечных КЭ.

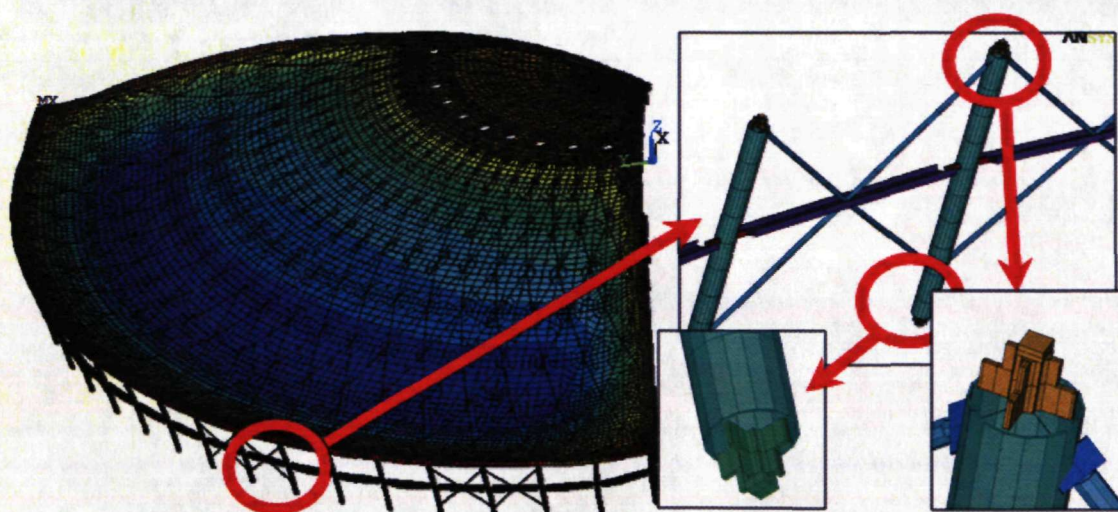


Рисунок 5.5. СОК «Трансвааль-парк». Оболочечно-стержневая КЭ-модель системы «ребристая оболочка покрытия–колонны со связями»

Оболочка представлена зонами скорлупы толщиной 70 мм, 100мм и 200 мм, а также опорным контуром и «переходной зоной» шириной 600 мм по оси 1 (толщиной 500 мм и 350 мм соответственно).

Заданы четыре типа ребер с приведенными прямоугольными сечениями для зон оболочки толщиной 70 мм, 100 мм, 200 мм и 350 мм и реальным эксцентриситетом.

#### 5.2.2. Собственные частоты

С целью верификации модели произведено сопоставление собственных форм и частот с результатами, полученными в ходе экспертизы обрушения СОК (собственные частоты представлены в таблице 5.2).

Таблица 5.2. Частоты собственных колебаний

№ ч-ты	Расчет (Павлов А. С.)	Экспертиза	Невязка
1	0.901	0.8971	0.435%
2	1.289	1.2722	1.321%
3	1.547	1.5910	2.766%

№ ч-ты	Расчет (Павлов А. С.)	Экспертиза	Невязка
4	2.080	2.1307	2.379%
5	2.306	2.3407	1.482%
6	2.371	2.3925	0.899%
7	2.468	2.4617	0.256%
8	2.572	2.5462	1.013%
9	2.608	2.6279	0.757%
10	2.772	2.6766	3.564%

Расчет динамических характеристик показал выраженную диспропорцию жесткостей оболочки покрытия и жесткостей колонн со связями, что проявляется в первых трех формах собственных колебаний расчетной модели конструкции, при которых оболочка в целом перемещаются в горизонтальной плоскости (по первой форме собственных колебаний – поступательно, а по второй и третьей – вращательно) как твердое тело. Только начиная с четвертой формы, оболочка начинает деформироваться в вертикальном направлении, как это принято в традиционном представлении о динамических деформациях оболочечных конструкций.

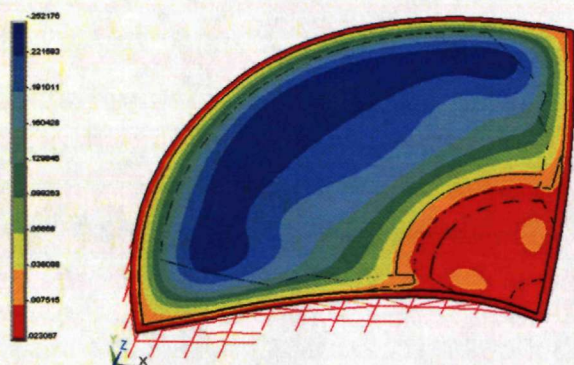
### 5.2.3. Статический расчет

Расчет системы производился с учетом растрескивания опорного контура и при реальных геометрических характеристиках верхнего узла колонн. Моделирование растрескивания производилось путем введения пониженного модуля упругости 9 ГПа. В расчетную комбинацию нагрузений включались:

- Собственный вес конструкций покрытия и колонн со связями
- Временная нагрузка по покрытию 0.6 кН/м<sup>2</sup>
- Снеговая нагрузка на момент обрушения СОК «Трансвааль» – 1.4 кН/м<sup>2</sup>.

По результатам расчета были определены наиболее нагруженные элементы (колонны 11r и 12r) и получены усилия и перемещения, которые представлены в таблице 5.3. На основании полученных усилий в дальнейшем были проведены численные испытания узлов конструкций, оценены схемы их работы и критические нагрузки разрушения.

*Вертикальные перемещения*



*Радиальные перемещения*

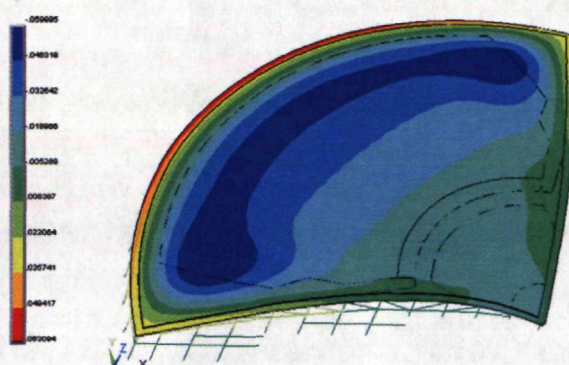


Рисунок 5.6. Перемещения (вертикальные и радиальные) при полной нагрузке

Таблица 5.3. Расчетные значения нагрузок и перемещений

Тип усилия	Значение
<i>Колонны 11r и 12r</i>	
N (колонна)	83.75 т
N (распорки)	43.79 т
Mx (колонна)	9.68 тм
Ux (радиальное перемещение)	0.063 м
<i>Оболочка покрытия</i>	
Uz (вертикальное перемещение)	0.252 м



### 5.3. Численное моделирование процессов деформирования и разрушения конструктивных узлов сооружения

#### 5.3.1. Описание моделей

Определение действительных схем работы конструктивных, критических нагрузок разрушения и остаточных ресурсов является важным этапом в оценке деформативности, общей устойчивости сооружения и прогнозировании сценариев аварийных ситуаций.

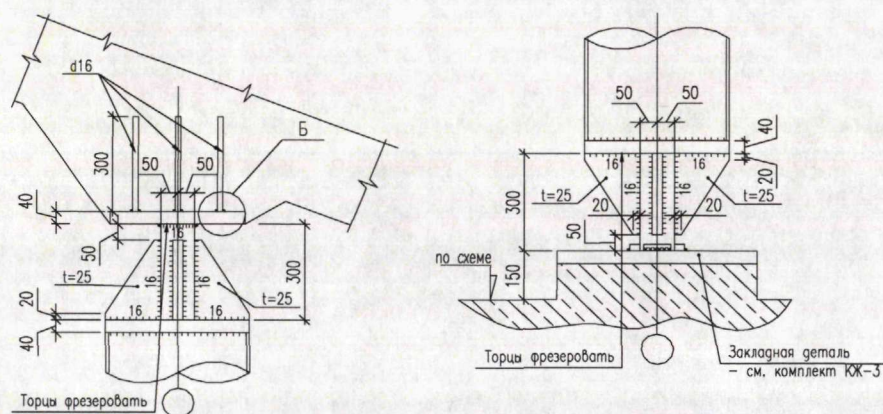


Рисунок 5.7. Схемы узлов конструкций

На основании проектных данных и экспертных обмерах узлов конструкций были построены *основные* КЭ-модели узлов конструкций:

- Параметрическая модель верхнего узла колонны (сварные катеты 16 мм и 22 мм). Трехмерное моделирование производилось с использованием объемных элементов Hallquist. Расчетная модель включала: блюмс (стержень прямоугольного сечения 100x100 мм), боковые ребра из стальных пластин толщиной 25 мм, сварные швы, пластины закладной детали железобетонной оболочки покрытия.

- Нижний опорный узел колонны – опорная плита. Трехмерное моделирование производилось с использованием объемных элементов Hallquist. Расчетная модель включала: участок блюмса, опорную пластину толщиной 40 мм, упорные бруски размером 30x30x80 мм, сварные швы 16 мм и 22 мм.

Таблица 5.4. Размерности моделей узлов

Модель	«Верхний узел»	«Нижний узел»
Кол-во узлов	52500	5544
Кол-во элементов	44500	5189

Контактные взаимодействия реализованы в варианте «поверхность-поверхность» с возможностью раскрытия контактов:

- Для нижнего узла - между группами элементов блюмса, пластины 40 мм и брусков

- Для верхнего узла - между блюмсом, пластиной 40 мм, ребрами

Решение контактных взаимодействий производится методом кинематических ограничений.

### 5.3.2. Верхний узел колонны

Верхний узел колонны является одним из важнейших узлов конструкции, определяющих схему ее работы и напряженно-деформированное состояние сопряженных конструкций. С целью выявления действительной схемы работы узла проведен ряд исследований при различных значениях сварных катетов (16 мм – проектный, 22 – натурные замеры):

- Проведена оценка жесткостных характеристик узла в зависимости от величины приложенной нагрузки

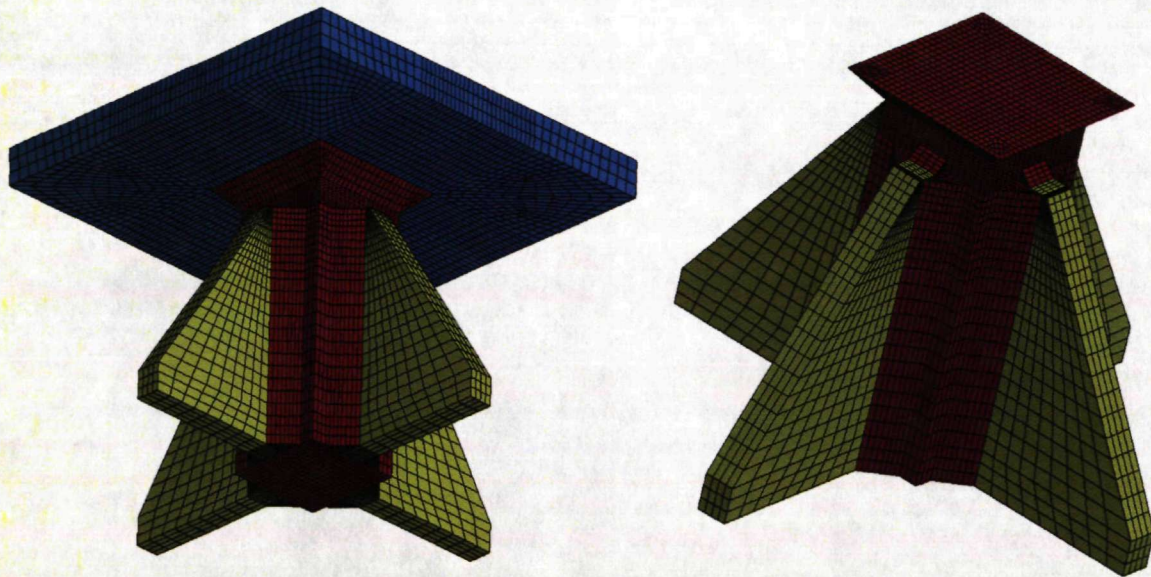
- Проведена оценка критических нагрузок разрушения

- Установлены картины разрушения

Нагружение модели производилось в два этапа с доведением узла до разрушения:

- Вертикальное сжимающее усилие от 0 до 80 т

- Изгибающий момент от 0 до 15 тм



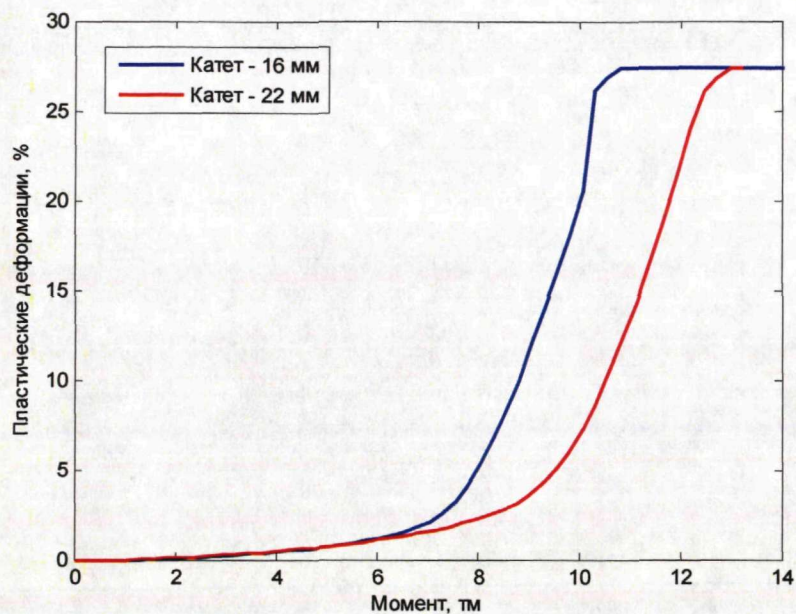
*Рисунок 5.8. КЭ-модель верхнего узла колонны*

По результатам «ретроспективного» численного моделирования процесса деформирования и разрушения верхнего узла колонны установлена отличная от шарнирной схема работы. Процесс нагружения сопровождается развитием пластических деформаций (см. рис. 5.13 и 5.15) в сечении блюмса с захватом областей сварных соединений. Вследствие этого происходит передача на нижележащие конструкции момента величиной от 10 до 13 тм. Конечный этап разрушения узла сопровождается мгновенным динамическим догружением нижележащих конструкций. Величины критических нагрузок представлены в таблице 5.5.

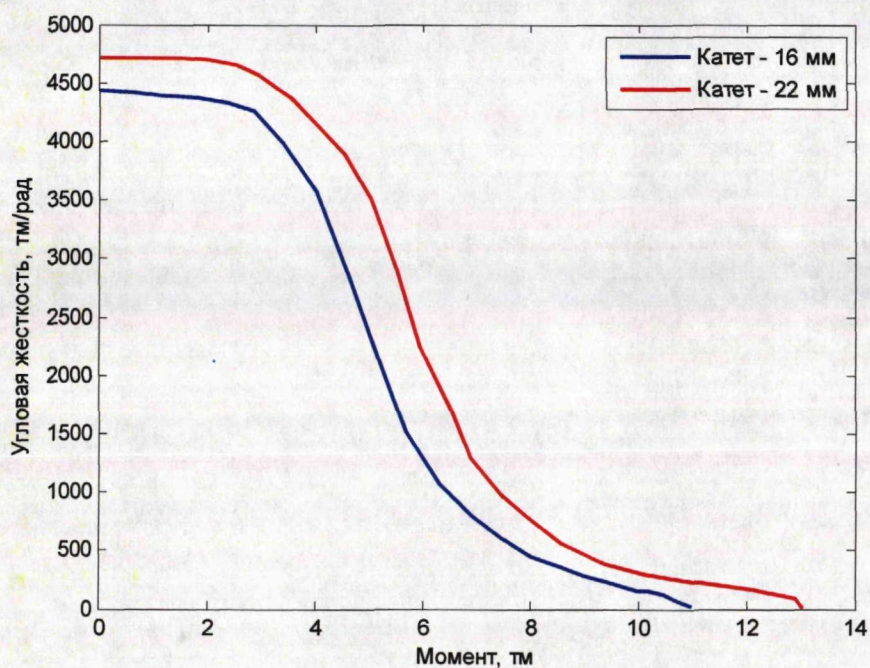
Картина разрушения блюмса (см. рис. 5.11), начинающаяся со стороны растянутых волокон в районе нижней грани сварного соединения, представляется следующим образом:

- Разрушение по границе сплавления шва (для катета 16 мм) или вырывание по контуру сечения металла блюмса (для катета 22 мм)
- Смятие платиной закладной детали зоны сжатых волокон сечения

Полученные картины разрушения имеют схожую структуру с натурными съемками.



*Рисунок 5.9. Огибающая зависимости пластических деформаций от приложенного момента по сечению блюмса*



*Рисунок 5.10. Зависимость угловой жесткости от величины момента*

Кроме того, на «сокращенных» моделях, включающих блюмс, пластину закладной детали и сварные швы, произведена оценка максимальных сдвигающих усилий, при которых происходит разрушение сварного соединения (см. рис. 5.16).

Полученные данные в дальнейшем используются при моделировании сопряжения верхних узлов колонн с покрытием на этапе оценки общей деформативности и устойчивости сооружения. Величины полученных критических нагрузок представлены в таблице 5.5.

Таблица 5.5. Разрушающие усилия

Модель	Катет 16 мм	Катет 22 мм
Разрушающий момент	10.3 тм	13 тм
Предельное сдвигающее усилие, сопровождаемое разрушением сварного шва	57 т	63 т

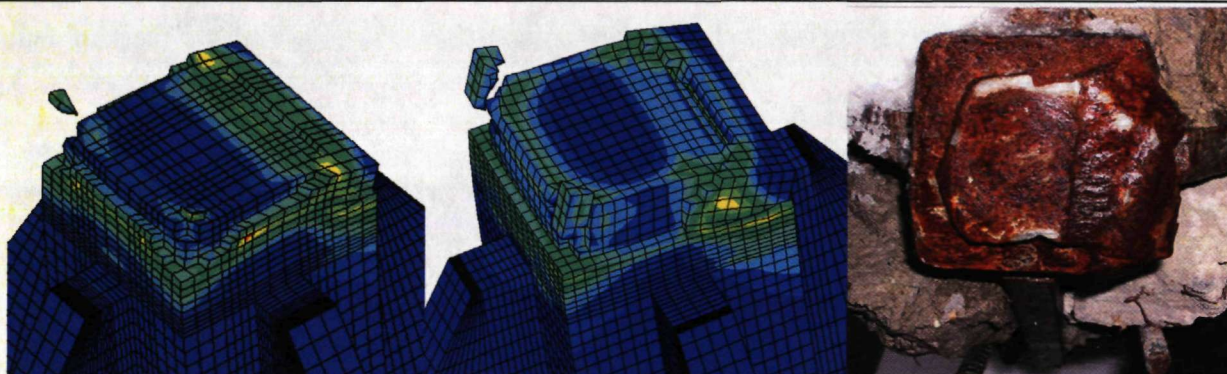


Рисунок 5.11. Картина разрушения блюмса (катет 16 мм, 22 мм, натурное разрушение узла)

Катет - 16 мм. Момент + сжимающее усилие

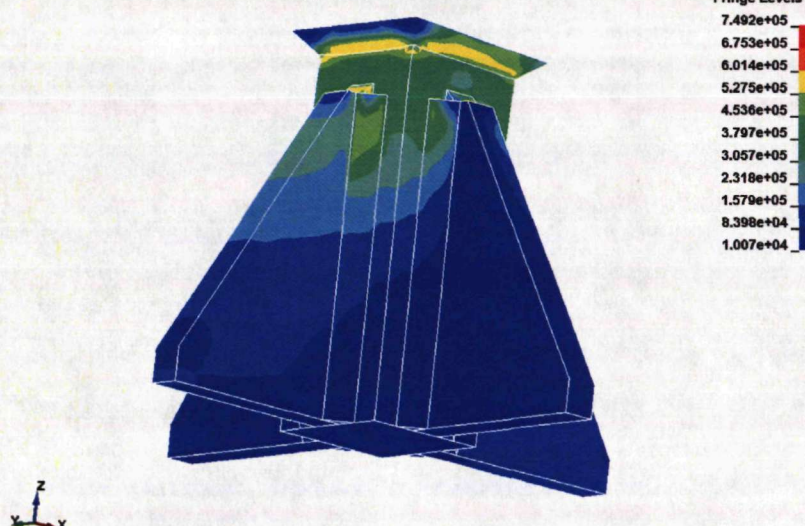


Рисунок 5.12. Катет 16 мм. Эквивал. истинные напряжения по Мизесу ( $\text{кН/м}^2$ )

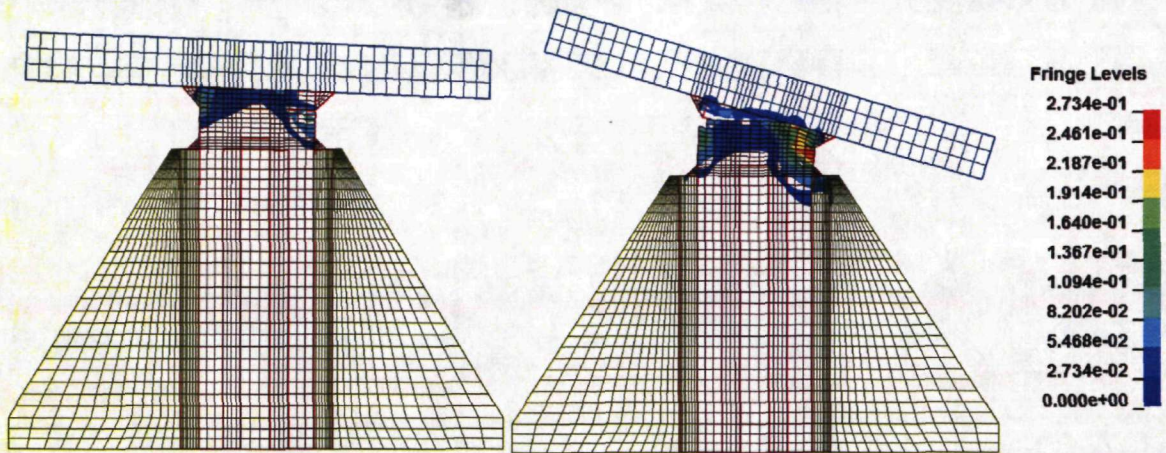


Рисунок 5.13. Катет 16 мм. Развитие пластических деформаций в сечении

Катет 22 мм. Момент + сжимающее усилие  
 Contours of Effective Stress (v-m)  
 min=11505.9, at elem# 13704  
 max=687631, at elem# 22787



Рисунок 5.14. Катет 22 мм. Эквивал. истинные напряжения по Мизесу (кН/м<sup>2</sup>)

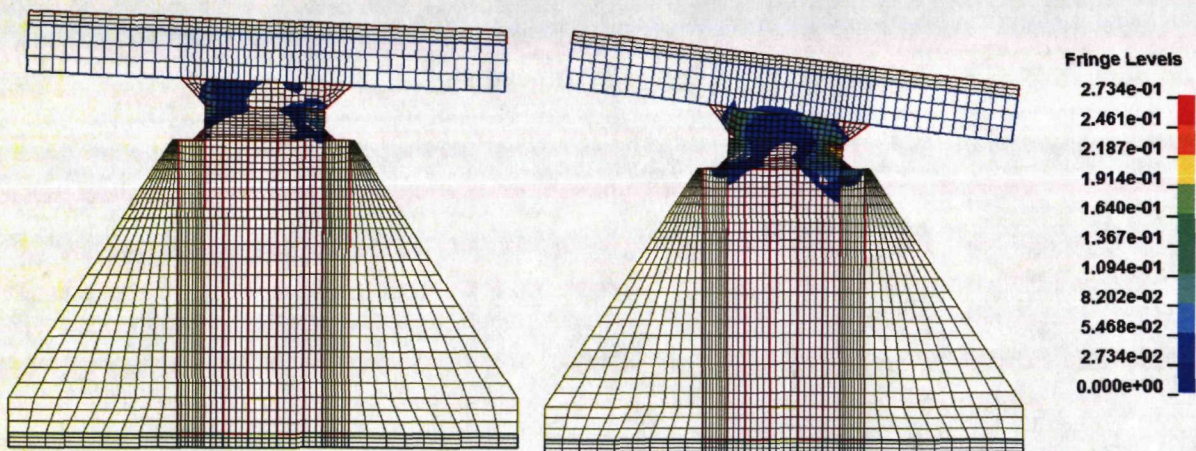
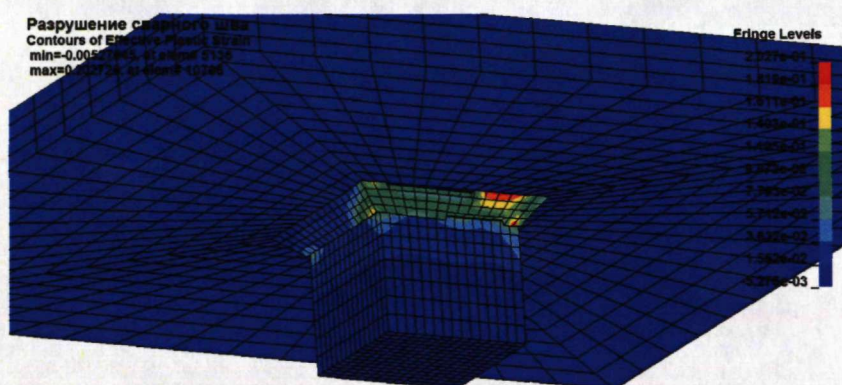


Рисунок 5.15. Катет 22 мм. Развитие пластических деформаций в сечении

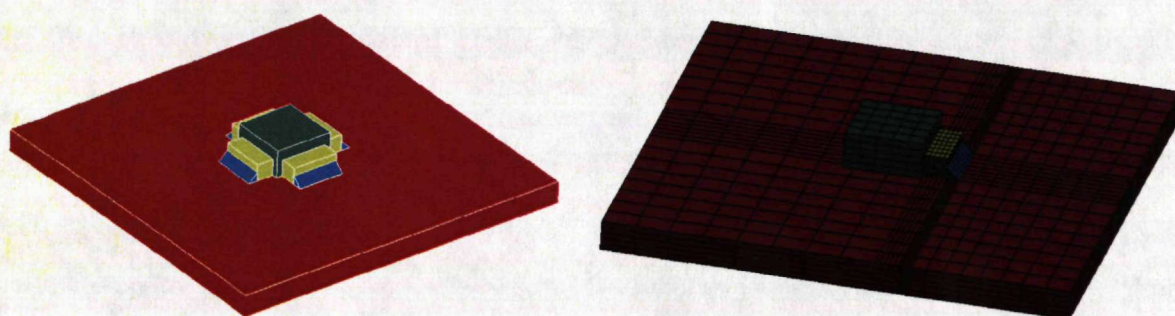


*Рисунок 5.16. Картина пластических деформаций в сварном шве при критической сдвиговой нагрузке*

### *5.3.3. Нижний опорный узел колонны*

По результатам предварительных статических и динамических расчетов (определение собственных частот и форм колебаний) следующим узлом, оказывающим влияние на действительную схему работы всего сооружения, был выбран нижний опорный узел. Оценивались критические сдвигающие и разрушающие нагрузки, передаваемые с колонны на ограничивающие бруски. Общая схема сокращенной модели представлена на рисунке 5.17.

Воздействие моделировалось путем равномерного смещения бдюмса с заданной скоростью вдоль оси X, таким образом, чтобы обеспечить максимальное усилие на один из четырех брусков. Величина воспринимаемого и разрушающего усилия оценивалась на основе возникающей контактной силы.



*Рисунок 5.17. Схема и расчетная модель нижнего узла*

Материал бдюмса принимался абсолютно жестким, для сварного шва использовалась реальная диаграмма деформирования, характеристики остальных материалов устанавливались на основании нормативных документов.

В процессе загрузки в зоне стыковки бруска, сварного шва и опорной пластины (см. рис. 5.18), происходит развитие пластических деформаций и последующим разрушением вдоль шва. Расчетные критические сдвигающие усилия составили 43 и 50 т для катетов 16 и 22 мм соответственно. Графики зависимости сдвиговой силы от смещения блямса представлены на рисунках 5.20 и 5.21.

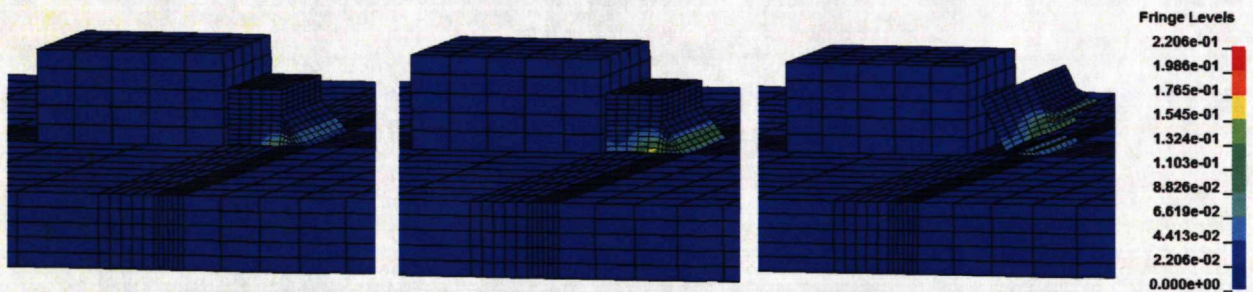


Рисунок 5.18. Катет 16 мм. Картины развития пластических деформаций и разрушения

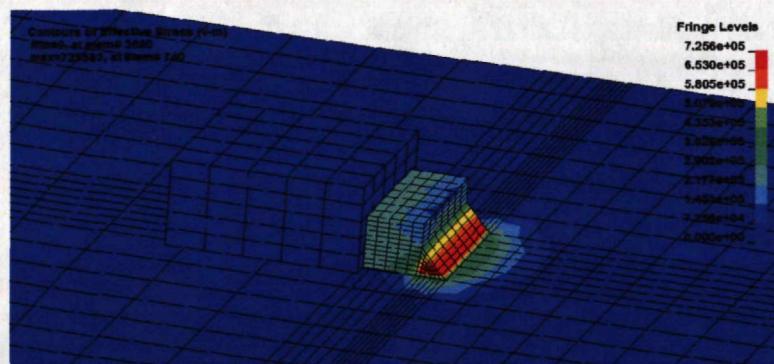


Рисунок 5.19. Катет 16 мм. Эквивал. напряжения по Мизесу,  $\text{кН/м}^2$

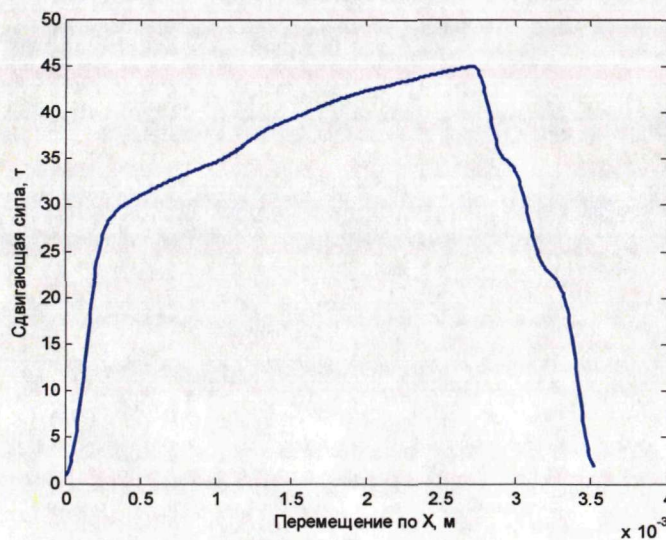


Рисунок 5.20. Катет 16 мм. Зависимость сдвиговой силы от смещения блямса



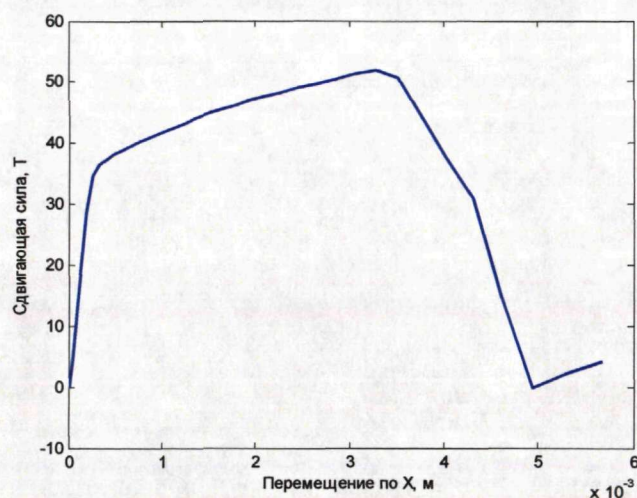


Рисунок 5.21. Катет 22 мм.

*Зависимость сдвиговой силы от смещения блюмса*

#### 5.4. Исследование напряженно-деформированного состояния и устойчивости модели «Колонна - распорки»

##### 5.4.1. Описание модели

По результатам исследования НДС верхнего узла колонны установлена отличная от проектной схема сопряжения колонны с покрытием: «упругоподатливая» вместо «шарнирной».

Исследуемая колонна представляет собой оштукатуренные стальные трубы 426x9 мм длиной 7.1 м. Для горизонтальных распорок Р1 применялись спаренные стальные двутавры № 12, «накрытые» сеткой. С колонной связи соединяются сваркой через пластину и короб, соответственно в уровне 4.12 м.

На базе исходных данных разработаны «оболочечные» модели колонны с 2-мя коробами с использованием четырехузловых изопараметрических КЭ Бельчко-Цая.

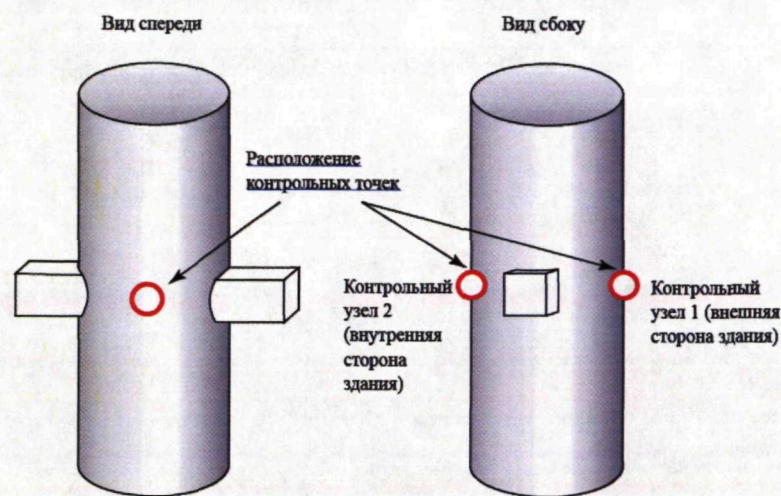


Рисунок 5.22. Схема расположения контрольных точек

Таблица 5.6. Число узлов и элементов в модели колонны

Модель	Колонна со связями
Кол-во узлов	12320
Кол-во элементов	11426

Верхняя и нижняя зоны колонны (блумс с ребрами) моделировались упрощенно жесткими телами. Снизу назначались условия шарнирного опирания, сверху и по границе коробов – заданные нагрузки и перемещения.

Задача решается в физически (пластичность металла колонн) и геометрически (значимые перемещения) нелинейных постановках. Рассмотрены следующие варианты нагружения, отражающие реальный разброс для различных колонн.

К верхнему узлу прикладываются усилия, полученные из предварительного расчета: радиальное перемещение 65 мм, вертикальное сжимающее усилие 80 т, изгибающий момент 10 тм, осевое растягивающее усилие в уровне распорок величиной 40 т на каждую. При этом рассматривались две комбинации загрузений:

1. Прикладываются все нагрузки, указанные для верхнего узла и распорок
2. Прикладываются все нагрузки, кроме изгибающего момента

Результаты расчетных исследований показывают, что потеря устойчивости сжатой колонны с растянутыми связями Р1 происходит не по «традиционной» стержневой форме при высокой критической нагрузке, а по сугубо оболочечной форме в зоне коробов (с изменением кольцевой формы сечения на сложную эллипсообразную с большим радиальным прогибом со стороны внешней стороны колонны) при весьма высоком уровне пластических деформаций при нагрузках, близких к заданным (1.035 – для комбинации 1, 1.14 – для комбинации 2). Форма локальной и общей потери устойчивости имеет сходную картину вне зависимости от величины прикладываемого момента, различается только критическая нагрузка. Закритическое поведение характеризуется прохлопыванием оболочки (см. рис. 5.24 и 5.25) с внешней стороны колонны, с дальнейшим перегибом колонны (сравни с натурной потерей устойчивости колонны 1/11r). По результатам проведенного моделирования составлена таблица 5.7.

*Таблица 5.7. Коэффициенты перегрузки в момент потери устойчивости*

<i>Загружение</i>	<i>Критическая нагрузка</i>
<i>Продольное усилие 80 т, момент 13 тм, горизонтальное перемещение 65 мм, усилие в распорках 40 т</i>	<i>1.14</i>
<i>Продольное усилие 80 т, горизонтальное перемещение 65 мм, усилие в распорках 40 т</i>	<i>1.035</i>

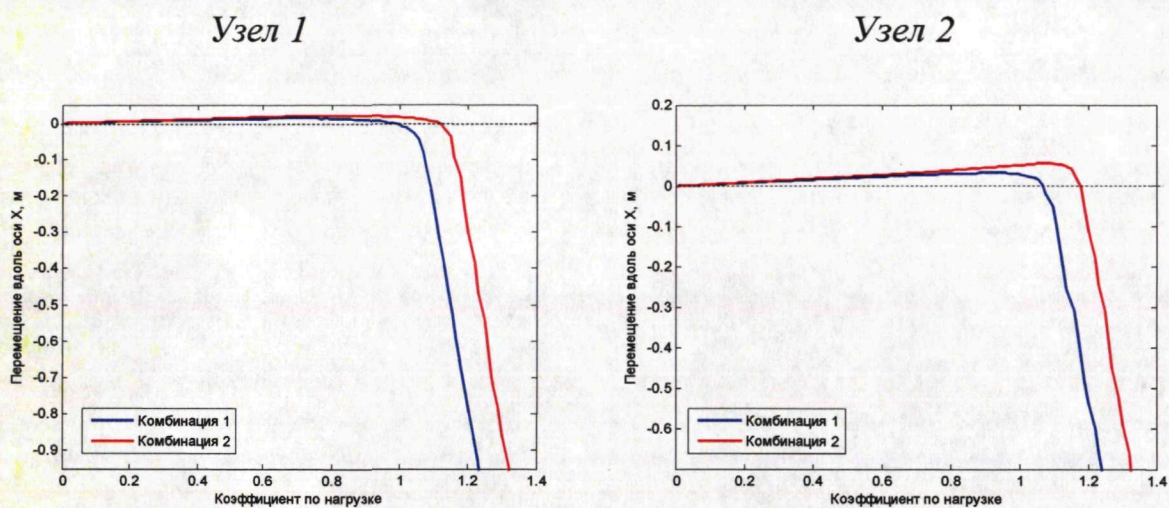


Рисунок 5.23. График перемещения контрольных узлов 1 и 2 (внешняя сторона сооружения), м

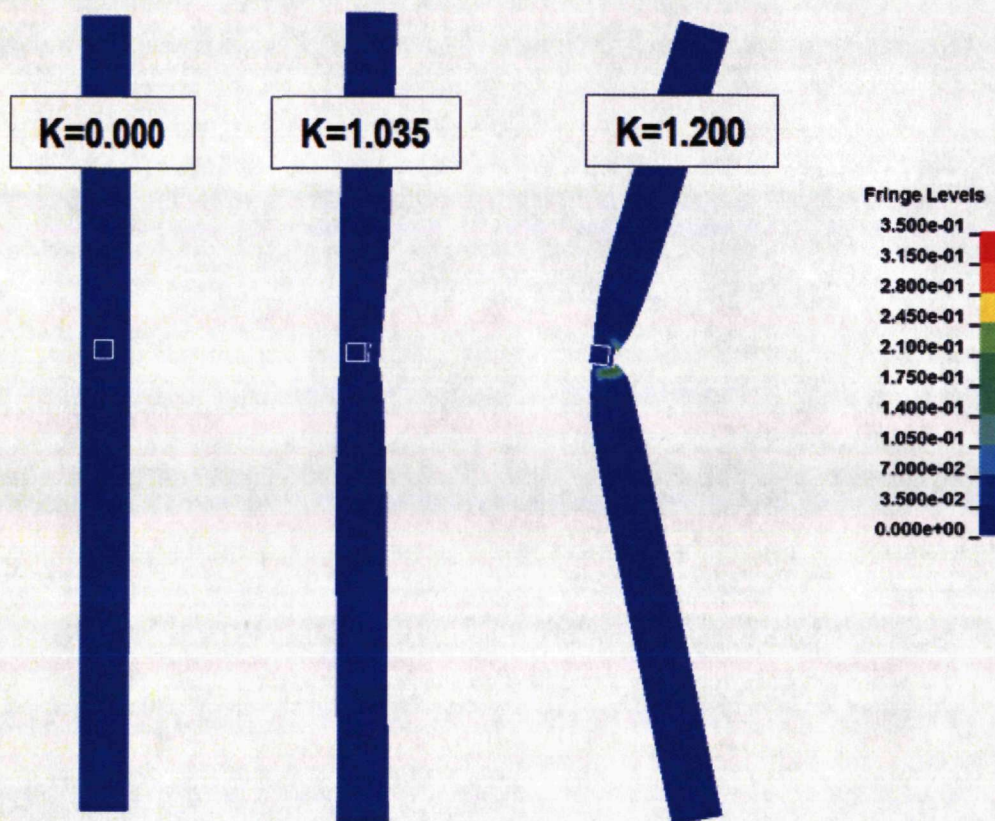


Рисунок 5.24. Комбинация 1. Потеря устойчивости колонны с переходом в критическую стадию. Пластические деформации в сечении.

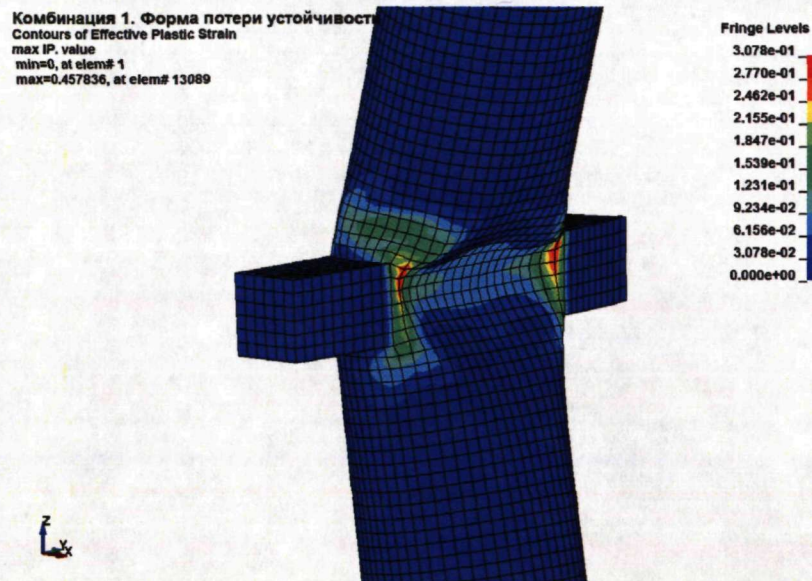


Рисунок 5.25. Комбинация 1. Форма полученной потери устойчивости оболочки



Рисунок 5.26. Натурная форма потери устойчивости

## 5.5. Численное моделирование сценарного деформирования, разрушения и обрушения большепролетного сооружения

### 5.5.1. Описание модели

На основании проектной документации и результатам проведенных исследований деформирования и разрушения отдельных узлов и групп элементов конструкции создана оболочечно-стержневая конечноэлементная модель, достаточно подробно повторяющая ее геометрические и жесткостные свойства. Посредством программного модуля InterDYN полученная КЭ-сетка была преобразована в файл расчетного процессора LS-DYNA с внесением необ-

ходимых параметров, свойств материалов, параметров демпфирования, нагрузок, контактов и дискретных стыковочных элементов.

Таблица 5.8. Размерность задачи

Модель	«Ребристая оболочка покрытия – колонны со связями»
Кол-во узлов	12320
Кол-во элементов	11426

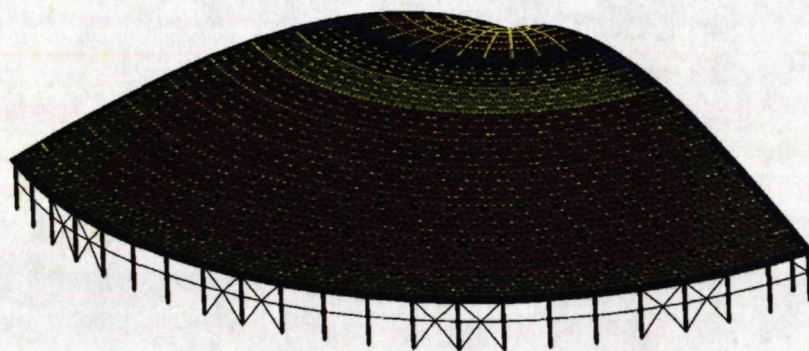


Рисунок 5.27. Расчетная КЭ-модель «ребристая оболочка покрытия – колонны со связями»

В таблице 5.9 приведены основные используемые в модели конечные элементы.

Таблица 5.9. Применяемые в модели конечные элементы

Наименование элемента	Применение
Стержни Hughes-Liu	Железобетонные балки покрытия
Оболочечные элементы Belytschko-Tsay	Моделирование стальных колонн и коробов
Оболочечные элементы Hughes-Liu с применение композитных слоев	Моделирование оболочки покрытия

Композитные оболочки состоят из пяти слоев и в зависимости от числа армирующих включений имеют либо последовательность в Б-А-Б-А-Б (Б – бетон, А – арматура), либо Б-Б-А-Б-Б.

В качестве основной модели бетона применяется модель EC2 двух типов: «бетон» – арматурные включения отсутствуют и «арматура» – моделирование поведения арматуры. Для стальных конструкций принимались ранее озвученные и используемые типы материалов.

Моделирование стыков «связь – колонна» производилось через введение дискретного элемента жесткой связи с установкой предельных значений на растяжение, исходя из предельных усилий разрушающих узел крепления.



Рисунок 5.28. Моделирование схемы работы верхнего и нижнего узлов

Для каждого нижнего узла вводились четыре элемента, работающих только на сжатие и выключающихся из работы по достижению предельной нагрузки деформации (см. схему на рис. 5.28). Верхний узел разрабатывался в двух вариантах: проектный вариант – шарнир, расчетный вариант – упругоподатливая связь (введение дискретного элемента моделирующего изгибную жесткость), при этом зависимость угла поворота вводилась на основании полученных данных по расчету узла в виде билинейной функции (см. рис. 5.29). Отдельно для верхнего узла вводились жесткие элементы, имеющие предельные значения сдвигающих и растягивающих разрушающих сварное соединение усилий.

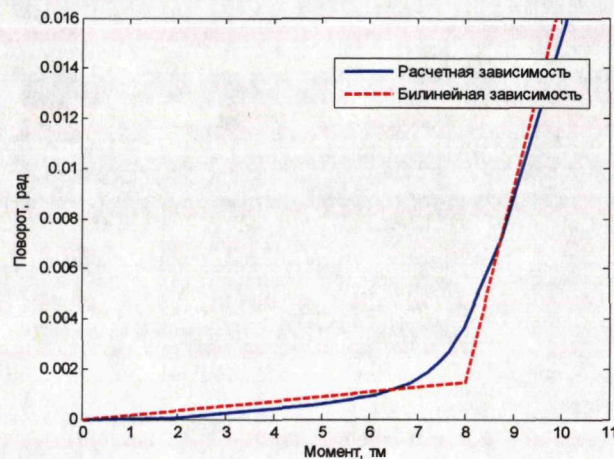


Рисунок 5.29. Расчетная и используемая зависимости угла поворота от приложенного момента

Все постоянные и временные нагрузки приводились к эквивалентной плотности участка покрытия. В процессе исследования рассматривались различные схемы загрузки снеговой нагрузкой сооружения, при этом в качестве основной была принята равномерно распределенная.

#### *5.5.2. Исследование влияния структурных изменений на работы системы «ребристая оболочка покрытия – колонны со связями»*

На основании разработанной модели созданы и проанализированы пять вариаций-сценариев для различных схем работы узлов колонн:

- с дискретным (пружинным) сопряжением колонн с покрытием и основанием (сценарий 1);
- «проектная» с шарнирным сопряжением колонн с покрытием (сценарий 2);
- динамическое разгружающее моментное воздействие в уровне стыковки покрытия с колонной 11г при изменении схемы работы узла с упругого на шарнирный (сценарий 3);
- разрушение сварного шва, связывающего распорку Р1 с колонной 11г (сценарий 4);
- разрушение опорных брусков колонн кольцевого ряда (сценарий 5).

*Сценарии 1 и 2* являются определяющими для дальнейшего исследования поведения конструкций в различных условиях эксплуатации. Полученные файлы расчетов используются в дальнейшем для анализа возмущающих воздействий.

На первом этапе в рамках указанных сценариев моделировалось квазистатическое нагружение для режима нормальной эксплуатации. Постепенное нагружение сопровождалось повышенным демпфированием для нивелирования динамических эффектов (квазистатическое нагружение). Для данного этапа характерно постепенное снижение скорости вертикальных перемещений с последующей стабилизацией конструкции (максимальные вертикальные перемещения составили порядка 25 см).

По достижении стабилизации для *сценария 1* производилось плавное увеличение нагрузки до момента начала роста скорости вертикальных пере-



мещений (используется демпфирование с минимальными значениями) с дальнейшим отслеживанием механизма разрушения:

- Возникновение пластических деформаций с возникновением в дальнейшем оболочечной потери устойчивости в колоннах 4г и 19г с внутренней стороны.
- Разрушением верхних узлов колонн 4г и 19г.
- Нарастающее разрушение верхних узлов колонн от крайних осей 4г и 19г к центру 11г и 12г.
- Сильное деформирование покрытия сопровождается выталкиванием большей части поддерживающих колонн наружу
- Под давлением покрытия выталкиваемые колонны 11г и 12г теряют устойчивость по оболочечной форме (изгибаясь наружу сооружения) в уровне стыковки с распорками Р1 (по сходному принципу, полученному при детальном исследовании данной колонны ранее, см. параграф 5.4).

Стоит так же отметить, что по результатам вариантного моделирования сценариев 1 и 2 с различными картами снеговых нагрузок по покрытию расположение инициирующего начало обрушения колонн (в данном случае 4г и 19г) меняется.

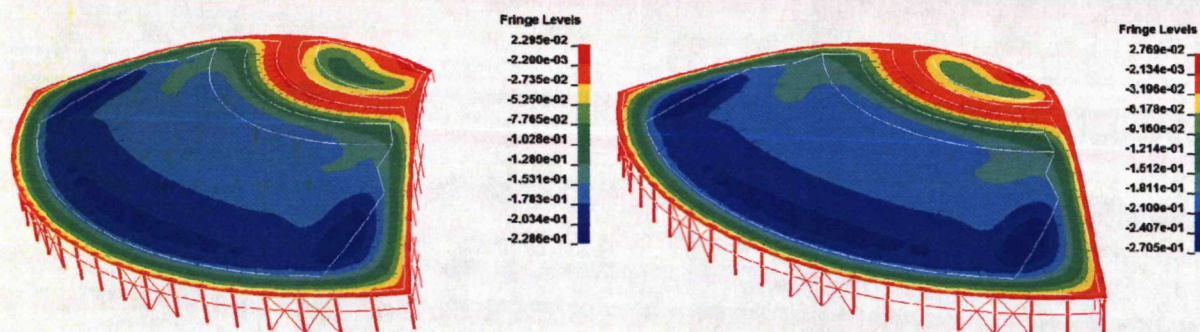


Рисунок 5.30. Сценарий 1 и 2. Вертикальные перемещения (постоянная и снеговая равномерно распределенная нагрузка), м

Колонны по осям 11r и 12r

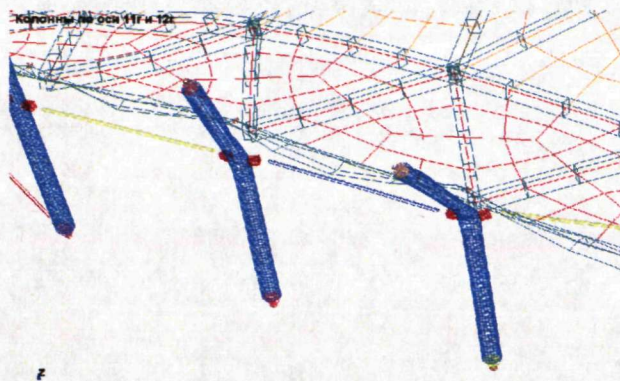


Рисунок 5.31. Локальные разрушения (модель сценария 1)

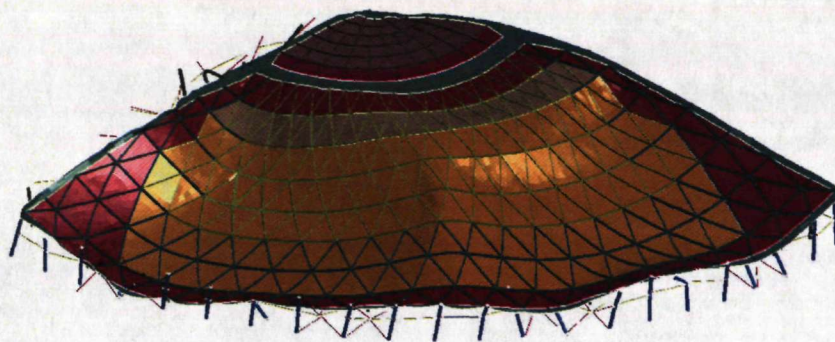


Рисунок 5.32. Общий вид обрушения (модель сценария 1)

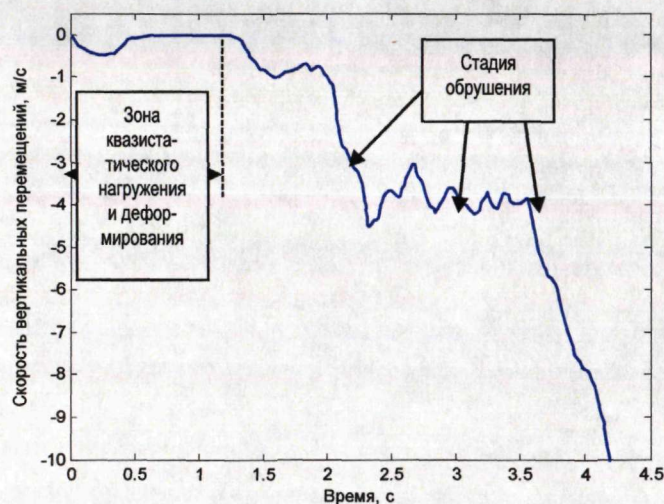
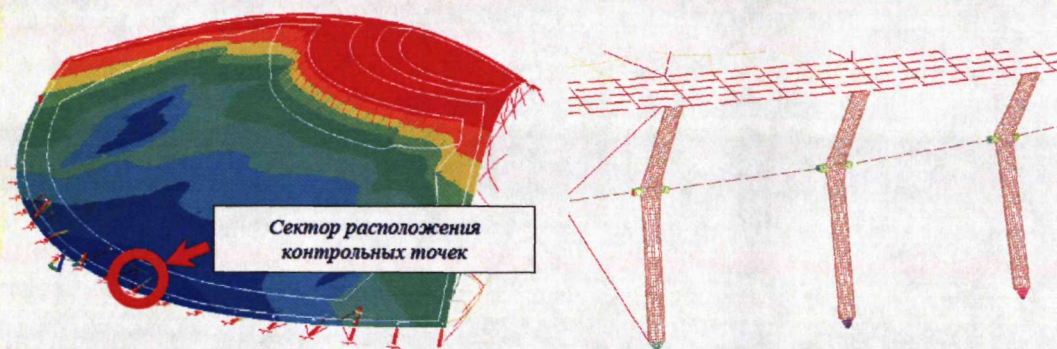
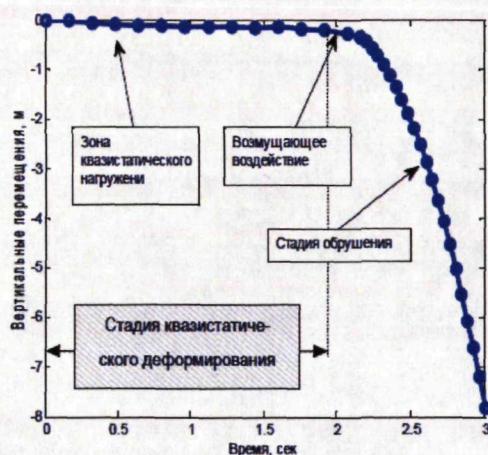


Рисунок 5.33. Сценарий 1. Скорость вертикальных перемещений наиболее деформированных узлов покрытия

*Сценарий 3.* Используя расчетную модель и файлы для продолжения расчета от сценария 1 на момент стабилизации вертикальных перемещений, проведено исследование влияния измененной схемы работы верхнего узла колонны на сооружение в целом. Переход от упругоподатливой схемы работы к шарнирной производится посредством «демонтажа» дискретного элемента изгибной жесткости в течение 0.001 с. Рассматривались две схемы: с жесткой стыковкой элементов и с разрушающимися стыками. Первая схема сопровождается большим числом колонн с локальной потерей устойчивости в зонах стыковки с распорками Р1 (картина обрушения и график деформирования представлен на рис. 5.34 и 5.35) с последующим обрушением покрытия.



*Рисунок 5.34. Сценарий 3. Картины обрушения и локальной потери устойчивости в элементах*



*Рисунок 5.35. Сценарий 3. Осредненный график вертикальных перемещений узлов покрытия в районе колонны 11r (м)*

Сценарий 3 с применением разрушающихся соединений показал схожий процесс деформирования и обрушения с первым сценарием. Изменение схемы работы узла вызвало локальную потерю устойчивости колонной 11r (с внутренней стороны сооружения) и лавинообразное разрушение блюмсов (начинающееся в районе колонн 4r, 12 r и 19 r) с выталкиванием колонн наружу.

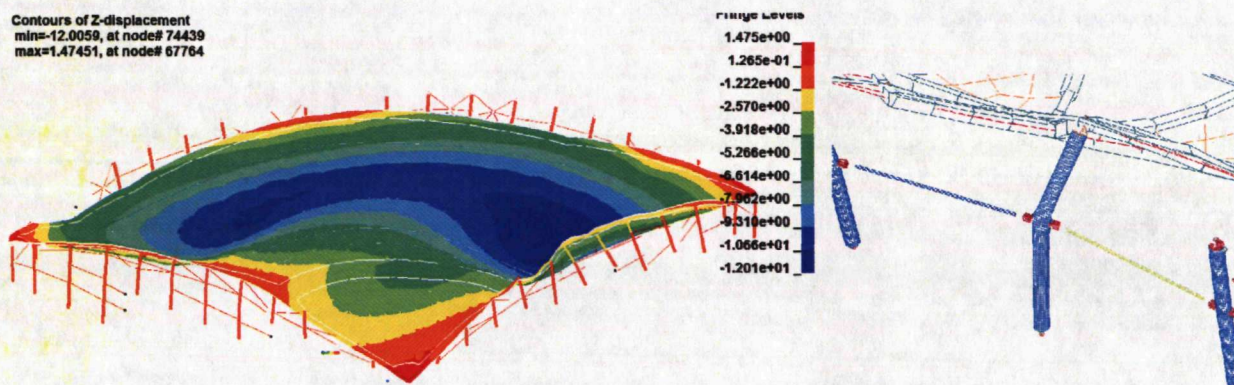


Рисунок 5.36. Картина обрушения (вертикальные перемещения, м) и форма потери устойчивости колонной

Сценарий 4 (разрушение сварного шва, связывающего распорку P1 с колонной 11r). Используя расчетную модель и файлы продолжения расчета от сценария 1 на момент стабилизации вертикальных перемещений, проведено исследование влияния возможного (при условии некачественно выполненного узла) разрушения наиболее нагруженного сварного соединения распорок P1 с колонной 11r (или 12r).

Процесс деформирования сопровождается практически одновременным срезом блюмса верхних узлов колонн с выбросом наружу и потерей устойчивости оболочкой. На рисунке 5.37 показаны картина обрушения и график изменения скорости вертикальных перемещений.

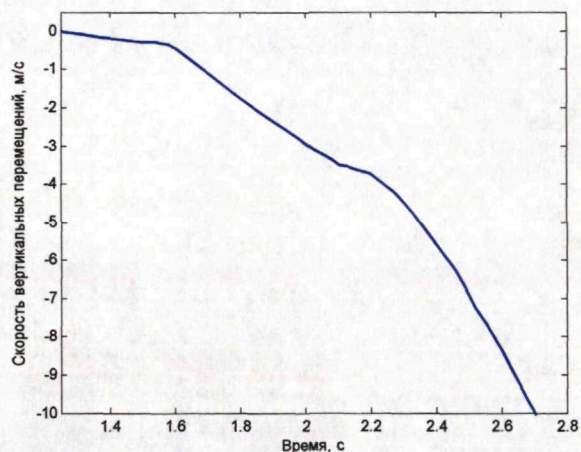
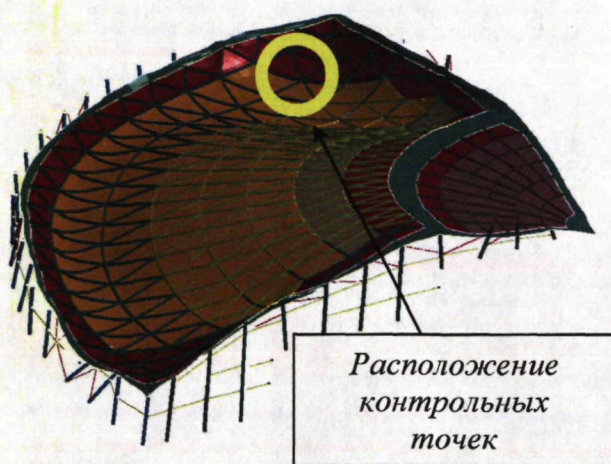


Рисунок 5.37. Сценарий 4. Картина обрушения и график изменения скорости вертикальных перемещений в контрольных точках покрытия (показан участок обрушения)

Сценарий 5. Влияние разрушения опорных брусьев колонн кольцевого ряда на устойчивость сооружения. Для проведения численного эксперимента использовалась модель с дискретными элементами с пониженными прочностными характеристиками (подобраны таким образом, чтобы разрушаться при повышении нагрузки на сооружение на 5%) по сравнению с моделями сценариев 1 и 2. При приложении нагрузки порядка 105% происходит резкое разрушение нижних опорных узлов в районе колонн 3r-5r. В дальнейшем, с учетом полученного закручивающего импульса в колоннах с крестовыми связями происходит разрушение крестовых связей и разрушения ряда верхних узлов

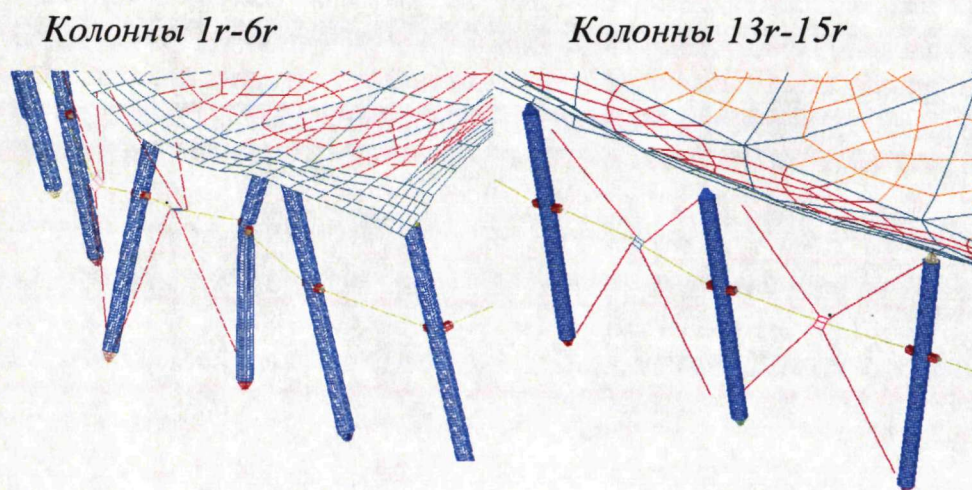


Рисунок 5.38. Картины разрушения в локальных группах элементов

### **Выводы по главе 5:**

1. Разработанная численная методика использована для «ретроспективных» нелинейных статических и динамических расчетов реальных конструктивных узлов («покрытие – колонна» и «колонна – основание») и элементов («колонна – распорки») системы «железобетонная оболочка покрытия – колонны со связями» спортивно-оздоровительного комплекса «Трансвааль-парк».

2. По результатам проведенного численного моделирования получены картины разрушения узлов сходные с натурными съемками.

3. Разработанная численная методика использована для вариантного моделирования различных схем работы конструктивных узлов и их влияния на поведение системы «железобетонная оболочка покрытия – колонны со связями» спортивно-оздоровительного комплекса «Трансвааль-парк».

4. Для одного из расчетных вариантов системы «железобетонная оболочка покрытия – колонны со связями» получен сходный с зафиксированным в 2004 г. сложный нелинейный характер деформирования и локального инициирующего разрушения конструктивных узлов и прогрессирующий характер обрушения всей системы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Из обзора современных отечественных и зарубежных разработок и исследований следует, что существующие методики расчета деформирования, локальных разрушений и прогрессирующего обрушения большепролетных конструкций нуждаются в дополнении и уточнении, особенно в части учета развитого нелинейного и быстропротекающего характера процессов.

2. Предложен подход и разработана реализующая его численная методика моделирования нелинейного деформирования и разрушения большепролетных сооружений с учетом инициирующего разрушения и(или) закритической работы тяжело нагруженных конструктивных узлов и элементов.

3. Основываясь на проведенном многопараметрическом сравнительном анализе численных методов решения трехмерных задач статики и динамики с развитыми нелинейностями (физической, геометрической и конструктивной), в качестве основного выбран метод конечных элементов с явной схемой интегрирования по времени, реализованный в программном комплексе LS-DYNA.

4. По результатам решения верификационных статических и динамических задач с развитой физической, геометрической и конструктивной нелинейностями по разработанной методике получены картины деформирования, потери устойчивости и разрушения моделируемых образцов и конструкций, близкие к «эталонным» экспериментальным и теоретическим данным. На физически нелинейных задачах проведен отбор библиотеки материалов (металлы, бетон и железобетон, резиноподобные) для разрабатываемого программного модуля.

5. Разработан программный модуль InterDYN, позволяющий автоматизировать процесс применения разработанной методики и подготовки расчетных моделей и скриптов визуализации для базового ПК LS-DYNA.

6. Разработанная численная методика использована для «ретроспективных» нелинейных статических и динамических расчетов реальных конструк-

тивных узлов («покрытие – колонна» и «колонна – основание») и элементов («колонна – распорки») и системы «железобетонная оболочка покрытия – колонны со связями» спортивно-оздоровительного комплекса «Трансвааль-парк». Подтвержден зафиксированный в 2004 г. сложный нелинейный характер деформирования и локального иницирующего разрушения конструктивных узлов и прогрессирующий характер обрушения всей системы.

7. Разработанная методика успешно используется для численного моделирования напряженно-деформированного состояния и прочности конструкций большепролетных сооружений в ГУП МНИИП Моспроект-4, Научно-образовательном центре компьютерного моделирования МГСУ и Научно-исследовательском центре «СтаДиО».

8. Разработанную методику можно рекомендовать для широкого спектра экспертных расчетных исследований нелинейного деформирования и разрушения конструкций большепролетных сооружений, а решенные верификационные задачи – как основу для планируемого проведения верификации ПК LS-DYNA в системе Российской академии архитектуры и строительных наук.



## ЛИТЕРАТУРА

- [1]. А. А. Ильюшин. Пластичность. Основы общей математической теории — М., Изд-во АН СССР, 1963.
- [2]. А. А. Ильюшин. Связь между теорией Сен-Венана-Леви-Мезиса и теорией малых упругопластических деформаций — Прикладная Математика и Механика, 1945.
- [3]. А. И. Садырин. Компьютерные модели динамического разрушения конструкционных материалов — Н. Новгород, ННГУ, 2010.
- [4]. А.М.Белостоцкий, С.И.Дубинский. Анализ причин обрушения конструкций покрытия СОК «Трансвааль-парк». ANSYS Solutions. Русская редакция. — Москва, 2007, №4.
- [5]. Александров В. М. Ворович И. И. Механика контактных взаимодействий — Наука, 2001.
- [6]. Андреев Л.В., Лебедев А.Г., Ободан Н.И. Об одном варианте метода конечных элементов в нелинейных задачах теории пластин и оболочек. Тр. X. Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин — Тбилиси, 1975.
- [7]. Бабицкий Э.Г. Шаговый метод решения задачи о равновесии упругой гибкой пластинки в конечно-элементной постановке — Известия вузов, Строительство и архитектура, №9, 1975.
- [8]. Баженов В. Г. Кибец А.Г. Численное моделирование нестационарного деформирования упругопластических конструкций методом конечных элементов — Известия РАН, МГТ, 1994, № 1, стр. 52-57.
- [9]. Баженов В.Г., Зефирова С.В., Петров М.В. Численное решение задач нестационарного контактного взаимодействия упругопластических оболочек вращения при больших деформациях. Прикл. проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Всес. межвуз. сб. — Горьк. ун-т, Горький, 1984, стр.54-59.

- [10]. Белостоцкий А. М., А. А. Аул, О. А. Козырев, Павлов А. С.. Расчеты зданий на устойчивость против прогрессирующего обрушения с учетом физической и геометрической нелинейностей. Сборник трудов первой международной научно-практической конференции «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы», МГСУ, Москва, 2008 г., стр. 183-194.
- [11]. Белостоцкий А. М., Павлов А. С.. Методология моделирования высоко нелинейных быстро протекающих процессов деформирования и гипотетического обрушения большепролетных зданий. Сборник трудов III Международной научно-практической конференции «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы». 2010 г. Стр. 64-68.
- [12]. Белостоцкий А. М., Павлов А. С.. Расчет конструкций большепролетных зданий с учетом физической, геометрической и конструктивной нелинейностей. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2010 г., стр. 80-86.
- [13]. Белостоцкий А. М., Павлов А. С.. Расчет конструкций большепролетных зданий с учетом физической, геометрической и конструктивной нелинейностей. Третий международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений». Новочеркасск, 2010 г., стр. 79.
- [14]. Белостоцкий А. М., Павлов А. С.. Численное моделирование закритического поведения конструкций методами нелинейной динамики. Сборник трудов IV Международной научно-практической конференции «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы». 2011 г., стр. 89-96.
- [15]. Белостоцкий А. М., С. И. Дубинский, Павлов А. С.. Анализ причин обрушения конструкций покрытия СОК «Трансвааль-парк». Часть 4. Численное моделирование нелинейного поведения критических конструктивных узлов и элементов. Вопросы прикладной математики и вычис-

- лительной механики. Сборник трудов № 13. МГСУ, Москва, 2010 г., стр. 136-145.
- [16]. Белостоцкий А.М. Программный комплекс СТАДИО для линейных и нелинейных статических и динамических расчетов пространственных комбинированных систем. Опыт разработки и эксплуатации и перспективы развития. – Сб. научных трудов МГСУ, М., 1998, с.4-11.
- [17]. Бондарь Б.Г. Осипов А.М. Некоторые нелинейные задачи изгиба стержней: Исследования по теории сооружений, вып.17 – М., Изд-во литературы по строительству, 1969, с.153-162.
- [18]. Бровко Г.Л. Анализ постановки и методы решения краевых задач теории упругопластических процессов малой кривизны. Канд. дисс. – М., Изд-во МГУ, 1978, 5 с.
- [19]. Бураго Н. Г., Кукуджанов В. Н. Обзор контактных алгоритмов – Москва, Изв. РАН, МТТ, 2001.
- [20]. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Численное решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет прикладных программ АСТРА – Препринт Института проблем механики АН СССР, № 326, 1988, стр. 1-63.
- [21]. Бураго, Н.Г., Кукуджанов, В. Н. Решение упругопластических задач методом конечных элементов. Вычислительная механика деформируемого твердого тела – М.: Наука, 1991, вып. 2, стр: 78-122.
- [22]. Вайнберг Д. В., Сахаров А. С., Синявский А. Л. Исследование гибких пластин и оболочек. Расчет пространственных конструкций, вып.14 – М., Стройиздат, 1971.
- [23]. Валанис К. Обоснование эндохронной теории пластичности методами механики сплошной среды. Тр. ASME. Теоретические основы инженерных расчетов – 1984, том. 106, стр:72-81.
- [24]. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике – М., Гостехиздат, 1949.
- [25]. Вольмир А.С., Бирвган А.Ю. Исследование больших прогибов прямо-

угольной пластинки при помощи цифровых электронных машин – Изв. АН СССР, ОТН: Механика и машиностроение, № 2, 1959.

- [26]. Генки Г. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений. Теория пластичности Сборник статей. – М., ИЛ, 1948, стр. 117–135
- [27]. Глушак Б.Л., Новиков С.А., Рузанов А.И., Садырин А.И. Разрушение деформируемых сред при импульсных нагрузках. Монография – Н. Новгород, Изд-во ННГУ, 1992
- [28]. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости – М., Физматгиз, 1969
- [29]. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов – М., Машиностроение, 1968
- [30]. Городецкий А. С. Программный комплекс «ЛИРА-Windows» – Госкомградостроительства Украины, 1997
- [31]. Городецкий А.С., Карпиловский В.С. Построение разрешающих уравнений метода конечных элементов для трехмерной задачи нелинейной теории упругости. Расчет пространственных строительных конструкций – 1975, вып. 5, Куйбышев
- [32]. Государственный стандарт СССР ГОСТ 27751-88 (СТ СЭВ 384-87) «Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения по расчету»
- [33]. Григолюк Э.И. Устойчивость сферической оболочки при конечных прогибах и несимметричной деформации – Изв. АН СССР ОТН механика и машиностроение. М., 1960
- [34]. Григолюк Э.И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек – М., Наука, 1978
- [35]. Гриднева В.А., Корнеев А.И., Трушков В.Г. Численный расчет напряженного состояния и разрушения плиты конечной толщины при ударе бойками различной формы – Изв. АН СССР, МТТ, 1980; № 1, стр 146-157

- [36]. Гулидов А.И., Шабалин И.И. Численная реализация граничных условий в динамических контактных задачах – Препринт ИТПМ СО АН СССР № 12-87, 1987
- [37]. Гулидов А.И., Шабалин И.Н. Расчет контактных границ с учетом трения при динамическом взаимодействии деформируемых тел. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности – Материалы IX Всес. конф., Новосибирск, 1988, стр. 70–75
- [38]. Гулидов А.И., Шабалин И.Н. Расчет контактных границ с учетом трения при динамическом взаимодействии деформируемых тел. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности – Материалы IX Всес. конф., Новосибирск, 1988, стр. 70-75
- [39]. Ермаков С.В. Исследование постановки краевой задачи теории упруго-пластических процессов средней кривизны. Вестн. Моск. ун-та, Сер.1 – М.: Мат. мех., 1982, № 2, с. 88–92.
- [40]. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.
- [41]. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986.
- [42]. Зылев В.Б., Соловьев Г.П. Алгоритм расчета плоской стержневой системы в случае больших перемещений – Строительная механика и расчет сооружений. 1980. № 5. с.35-38.
- [43]. Ильюшин А.А., Васин Р.А., Моссаковский П.А. Теория упругопластических процессов при больших пластических деформациях. Прикл. проблемы механики тонкостенных конструкций – М., Изд-во Моск.ун-та, 2000. С. 128-137.
- [44]. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающая микронапряжения – Изв. АН СССР, Механика твердого тела. 1981, № 5, стр. 99–110.
- [45]. Кадашевич Ю.И., Пейсахов А.М., Помыткин С.П. О локальных законах деформирования нестабильных материалов. Новожиловский сб. – СПб., Судостроение, 1992, стр. 125–134.

- [46]. Казаков Д.А., Капустин С.А., Коротких Ю.Г. Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций. Монография – Н. Новгород, Изд-во ННГУ, 1999
- [47]. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD – М.: Издательство СКАД СОФТ, 2007
- [48]. Качурин В.К. Гибкие нити с малыми стрелками. – Гостехиздат, 1956,- 224 с.
- [49]. Качурин В.К. Теория висячих систем. М., Госстройиздат, 1962.- 224 с.
- [50]. Киричевский В.В., Сахаров А.С. Исследование больших прогибов нетонких оболочек методом конечного элемента. Проблемы прочности, № II – 1975, с.64-71
- [51]. Киселев А.Б. Развитие метода Уилкинса для решения трехмерных задач соударения деформируемых тел. Взаимодействие волн в деформируемых средах – М., МГУ, 1984, стр. 87-100
- [52]. Кислоокий В. Н. Исследование статики и динамики висячих пневмонапряженных и комбинированных систем методом конечных элементов, - Строительная механика и расчет сооружений – М., 1977, № 4
- [53]. Кислоокий В. Н., Пасюта А. В., Подгорный И.А. и др. Автоматизация процессов формообразования оболочек висячих покрытий.- В кн.: Прикладная геометрия и инженерная графика, вып. 32 – Киев, 1981
- [54]. Кислоокий В.Н. Шимановский А.В., Осадчий В.Н. Исследование конечных перемещений пространственной вантово-стержневой системы висячего трубопроводного перехода методом конечных элементов – КИСИ: К., 1981
- [55]. Корнеев А.И., Шугалев В.Б. Численный расчет трехмерного напряженного состояния стержня при ударе частью боковой поверхности – Изв. АН СССР; МТТ, 1986, № 1, стр 189-192
- [56]. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел – Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2000

- [57]. Косицын С.Б. Решение нелинейных задач статики прямоугольных в плане пологих оболочек и пластин методом конечных элементов. Дис. канд. техн. наук – М., 1977
- [58]. Кузьменко А.Г. Основные уравнения теории упругости и пластичности и метод конечного элемента – Тула: Тульский политехнический ин-т, 1980
- [59]. Кукуджанов В. Н. Связанные модели упругопластичности и поврежденности и их интегрирование – Изв. РАН, МГТ, 2006, № 6, стр. 103–135.
- [60]. Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред – Успехи механики, 1985, том. 8, № 4, стр. 25–65
- [61]. Лебедев А.А. Развитие теорий прочности в механике материалов: Проблемы прочности. – 2010; № 5, стр. 127–146.
- [62]. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.ф., Ламашевский В.П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном нагружении. Справочник – Киев; Наукова думка, 1983
- [63]. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.ф., Ламашевский В.П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. Справочник – Киев, Издательский дом «Ин Юре», 2003
- [64]. Ливсли Р. Матричные методы строительной – М., Стройиздат, 1980, 224 с.
- [65]. Линь Т. Г. Физическая теория пластичности. Проблемы теории пластичности. Сер. Новое в зарубежной механике. Вып.7 – М., Мир, 1976, стр. 7–68
- [66]. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости – М., Наука, 1980
- [67]. Мелещенко Н.Г. К вопросу расчетной оценки условий работы стыковых соединений двигателей – Тр. Центрального научно-исслед. дизельного ин-та, 1978, Вып. 73, стр. 31–36.

- [68]. Механика в СССР за 50 лет. Том 3. Механика деформируемого твердого тела – М.: Наука, 1972
- [69]. Мизес Р. Механика твердых тел в пластически деформированном состоянии. Теория пластичности. Сборник статей. — М., ИЛ, стр. 57–69
- [70]. Мкртычев О. В. Учет волновых эффектов при расчете высотных зданий на сейсмические воздействия. Строительная механика и расчет сооружений
- [71]. Мкртычев О.В., Мкртычев А.Э. Расчет большепролетных и высотных сооружений на устойчивость к прогрессирующему обрушению при сейсмических и аварийных воздействиях в нелинейной динамической постановке Строительная механика и расчет сооружений. – 2009, № 4, с. 43–49
- [72]. Морозов Е. Н., Матвиенко Ю. Г. Методические основы исследований в механике разрушения – Заводская лаборатория, Диагностика материалов, 2002, том. 68, № 1, стр. 84–88.
- [73]. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости – М., Гостехиздат, 1948
- [74]. Новожилов В.В. Теория упругости – Л., Судпромгиз, 1958
- [75]. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л., Машиностроение, 1990
- [76]. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред – М., Мир, 1976
- [77]. П. В. Трусков, И. Э. Келлер. Теория определяющих соотношений. Некоторые современные теории пластичности. – Пермь, ПГТУ, 1999
- [78]. Павлов А. С.. Численное моделирование деформирования и разрушения узлов строительных конструкций. Научно-технический журнал Вестник МГСУ. 2011 г., № 4, стр. 525-529
- [79]. Перельмутер А.В. Основы расчета вантово-стержневых систем. – М., Стройиздат, 1969
- [80]. Петропавловский А.А, и др. Пример использования смешанного метода



для деформационного расчета висячих мостов. – Тр. МИИТ, Л 489, 1976, с.15-19.

- [81]. Петропавловский А.А. Матричные алгоритмы смешанного метода в нелинейных задачах теории висячих и арочных мостов современных систем.– Тр. МИИТ, вып. 561, 1977
- [82]. Поздеев А.А. Трусов П.В. Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения.– М.: Наука, 1986
- [83]. Поздняков А.А. Метод расчета контакта.– М., Труды МФТИ, 1979
- [84]. Покровский А.А. Геометрические соотношения конечного элемента и их применение к расчету гибких стержней и стержневых систем,- Прикладная механика, т. 14, № 7, 1978, с. 104-107.
- [85]. Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. – М.,-Л., Гостехиздат, 1948. 170 с.
- [86]. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л., Судостроение, 1974
- [87]. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. Учеб. пособие для вузов – М., Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988
- [88]. Рекомендации по защите высотных зданий от прогрессирующего обрушения. – М.: ГУП НИАЦ. – 2006
- [89]. Рекомендации по защите жилых каркасных зданий при чрезвычайных ситуациях. – М.: ГУП НИАЦ. – 2002
- [90]. Рекомендации по защите зданий с несущими кирпичными стенами при чрезвычайных ситуациях. – М.: ГУП НИАЦ. – 2002
- [91]. Рекомендации по защите монолитных жилых зданий от прогрессирующего обрушения. – М.: ГУП НИАЦ. – 2005
- [92]. Рекомендации по предотвращению прогрессирующих обрушений крупнопанельных зданий. – М.: ГУП НИАЦ. – 1999
- [93]. Ржаницын А.Р. Статика и динамика пологой упругой В. кн.: Висячие покрытия – М., Госстроиздат, 1962
- [94]. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим систе-

мам – М., Стройиздат, 1977

- [95]. Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов – М., Энергия, 1971
- [96]. Садырин А.И. К определению контактных усилий при соударении упругопластических тел. Прикл. проблемы прочности и пластичности, Всес. межвуз. сб., вып. 3 – Горьк. ун-т, Горький, 1976, стр. 70-73
- [97]. Садырин А.И. Конечно-разностная аппроксимация граничных условий в динамической контактной задаче. Прикладные проблемы прочности и пластичности, Статика и динамика деформируемых систем. Всес. межвуз. сб. – Горьковский ун-т, Горький, 1979
- [98]. Сахаров А.С. Равновесие вантовых сетей. – Сопротивление материалов и теория сооружений, вып. 3, 1965, стр.120-134
- [99]. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. – М., Машиностроение, 1978
- [100]. Сен-Венан Б. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости. Теория пластичности. Сборник статей – М., ИЛ, 1948, стр. 11–19
- [101]. Смирнов В.А. Висячие мосты больших пролетов – М., Высшая школа, 1975,- 368 с.
- [102]. Супрун А.Н. Развитие феноменологических моделей твердой деформируемой среды при помощи расширения класса операторов теории наследственной упругости – Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 3, стр. 172.
- [103]. Супрун А.Н. Системный подход в теории определяющих соотношений пластичности. Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. – М., Товарищ. науч. изд. КМК, 1995, вып. 53, стр. 142–158.
- [104]. Тимошенко С.П., Механика материалов. № 1.– Мир, 1976
- [105]. Угодчиков А.Г. Коротких Ю.Г. Некоторые методы решения на ЭЦВМ физически нелинейных задач теории пластин и оболочек – К.. Наукова думка, 1967

- [106]. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике – М.: Мир, 1967, стр. 212-263
- [107]. Шимановский А.В. Некоторые задачи статики нитей конечной жесткости – Строительная механика и расчет сооружений, № 6, 1981, с.29-32.
- [108]. Янг Т. Анализ упругого прощелкивания криволинейных пластин с использованием дискретных элементов – Ракетная техника и космонавтика, № 4, 1972
- [109]. Янг Т. Применение метода конечных элементов к расчету пластин с начальной прогибью при больших прогибах – Ракетная техника и космонавтика, № 8, 1971
- [110]. ACI 318 – The American Concrete Institute, 2005
- [111]. ADINA. Theory and Modeling Guide. Volume I: ADINA Solids & Structures – ADINA R & D; Inc. Watertown, 2010
- [112]. ANSI A58.1-1972 – American National Standards Institute, NY, 1972
- [113]. ANSI A58.1-1982 – American National Standards Institute, NY, 1982
- [114]. Ansys 11. Elements Reference – SAS IP, 2007
- [115]. Ansys 11. Structural Analysis Guide – SAS IP, 2007
- [116]. Ansys 11. Theory Reference for ANSYS and ANSYS Workbench – SAS IP, 2007
- [117]. Applied element method for structural analysis: Theory and application for linear materials. Structural engineering/earthquake engineering. – Japan: Japan Society of Civil Engineers, 2000, № 17, стр. 21–35
- [118]. Applied element method for structural analysis: Theory and application for linear materials. Structural engineering/earthquake engineering. – Japan, Japan Society of Civil Engineers(JSCE)) 17 (1), 2000, стр. 21–35
- [119]. AUTODYN User Manual – 2009 SAS IP, Inc
- [120]. Backlung J. Finite element analysis of nonlinear structures – Gotclorg, 1973
- [121]. Bathe K. J. Finite Element Procedures – Prentice Hall, 1996
- [122]. Bathe K.J. and Bouzinov P.A. On the constraint function-method for contact problems – Computers and Structures, 1997, том 64, стр. 1069–1085

- [123]. Bathe K.J. and Chaudhary A. A solution method for planar and axisymmetric contact problems – Int. J. Num. Meth. Engng., 1985, том 21, стр. 65-88
- [124]. Bathe K.J. and Chaudhary A. A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction – Computers and Structures, 1986, том 24, стр. 855-873
- [125]. Belytschko T. and Lin J.I. A three dimensional impact-penetration algorithm with erosion – Computers and Structures, 1987, том 25, стр. 95-104
- [126]. Belytschko T. and Lin J.I. A three dimensional impact-penetration algorithm with erosion – Int. J. Impact Engng., 1987, том 5, стр. 111-127
- [127]. Belytschko T. Neal M.O. Contact-Impact by the Pinball Algorithm with Penalty Projection and Lagrangian Methods. In: L.E. Schwer, N.J. Salamon and W.K. Liu, eds., Proc. Symp. on Comput. Techniques for impact, Penetration and Perforation of Solids – ASME, Winter Annual Meeting, San Francisco, CA, 1989
- [128]. Belytschko T. Neal M.O. Contact-Impact by the Pinball Algorithm with Penalty and Lagrangian Methods. – Int. J. Num. Meth. Engng., 1991, том 31, стр. 547-572
- [129]. Bishop J. F. W., Hill R. A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face – centered metal. Phil. Mag. Ser.7 – 1951, том 42, № 334, стр. 1298–1307
- [130]. Bishop J. F., Hill R. A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses. Phil. Mag. Ser.7 – 1951, том 42, № 327, стр. 414–427
- [131]. Brebbia C., Connor J. Geometrically nonlinear finite element analysis – J. Engr. Mech. Div., том 95, 1969
- [132]. Campos L.T., Oden J.T., Kikuchi N. A. Numerical Analysis of a Class of Contact Problems with Friction in Elastostatics – Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1982, том 34, стр. 821–845
- [133]. Cook R. D. Concepts and application, of finite element analysis – NY, 1974
- [134]. Coulomb C. A. Essai sur une application des regles de maximis et minimis a

quelques problemes de statique relatifs a l'architecture. Memoires de Mathematique et de Physique – Paris, l'Academie des Sciences par divers savants, 1776, том VIII, стр. 343–382.

- [135]. Courant R. Bull. Amer. Math. Soc. – 1943, том 49, стр. 1–43
- [136]. Diekmann R., Hungershofer J., Lux M., Taenzer L. and Wierumy J.-M. Using Space Filling Curves for Efficient Contact Searching – 16th IMACS World Congress, 2000
- [137]. Doelfs P., Neubauer I. Using MSC.Nastran for Explicit FEM Simulations, LS-DYNA Anwenderforum – Bamberg, 2004
- [138]. Eurocode 1 – EN 1991-1-7: Actions on structures – Part 1-7: General Actions – Accidental actions. January 2006.
- [139]. F. R. Tuler. B.M. Butcher. A Criterion for the Time Dependence of Dynamic Fracture The International Journal of Fracture Mechanics – 1968, № 4
- [140]. G. Blankenhorn, S. Mattern, K. Schweizerhof. Controlled Building Collapse Analysis and Validation – Universität Karlsruhe, Institut für Mechanik. 2007
- [141]. G. Blankenhorn, S. Mattern, K. Schweizerhof. Numerical Investigation on Collapse Kinematics of a Reinforced Concrete Structure within a Blasting Process – Universität Karlsruhe, Institut für Mechanik. 2007
- [142]. G. Blankenhorn, S. Mattern, K. Schweizerhof. Numerical Simulation of Controlled Building Collapse with Finite Elements and Rigid Bodies – Case Studies and Validation. Universität Karlsruhe, Institut für Mechanik. 2007
- [143]. G.R. Cowper. P. S. Symonds. Strain Hardening and Strain Rate Effects in the Impact Loading of Cantilever Beams. Applied Mathematics Report – Brown, Brown University, 1958
- [144]. Ghaboussi J., Wilson E.L., Isenberg J. Finite element of rock joints and Interfaces – J. of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE 99, 1973, стр. 833-848
- [145]. GSA. Progressive Collapse Guidelines. 2003
- [146]. Guido Dhondt. CalculiX CrunchiX USER'S MANUAL version 2.3 – 2011
- [147]. Gurson, A. L. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation

- and Growth: Path I-Yield Function and Flow Rules for Porous Ductile Media – ASME Transaction, J. Eng. Mat. Tech., № 99, 1977, стр. 2–17
- [148]. Hallquist J.O., Goudreau G.L. and Benson D.J. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computation – Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1985, том. 51, стр. 107-137
- [149]. Henri Tresca. Minutes of the Proceedings – London, Institution of Civil Engineers, том 83, 1886, страницы 425–430
- [150]. Hibbit, H. D., Marcal P. V., Rice J. R. A Finite element formulation for problems of large strain and large displacement – Internat. J. Solids Struct. (1970) 1069-1086
- [151]. Hibbitt D. Karlsson B. Sorensen P. Abaqus 6.1. Theory Manual – Hibbitt, Karlsson & Sorenson Inc, 2000
- [152]. Hibbitt D. Karlsson B. Sorensen P. Abaqus 6.1. Verification Manual – Hibbitt, Karlsson & Sorenson Inc, 2000
- [153]. Hibbitt D. Karlsson B. Sorensen P. Abaqus/Explicit User's Manual – Hibbitt, Karlsson & Sorenson Inc, 2000
- [154]. Hirota G., Fisher S., State A., Lee C. and Fuchs H. An Implicit Finite Element Method for Elastic Solids in Contact – SIGGRAPH 2001 Conf, 2001
- [155]. Huber M. T. Nowoczesne wzory wytrzymaosci ozonej. Pisma – Warszawa, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, том. II, 1956, стр. 21–42.
- [156]. Hughes T.J.R., Taylor R.L., Sackman J.L., Curnier A. and Kanoknukulchai W. A finite element method for a class of contact-impact problems – Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1976, том 8, стр. 249–276
- [157]. Hughes, T.J.R. (1987) The Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [158]. J. O. Hallquist. LS-DYNA Keyword user's manual – Livermore, LSTC, 2010.
- [159]. J. O. Hallquist. LS-DYNA Theoretical Manual – Livermore, LSTC, 2006.
- [160]. Johnson K.L. Contact Mechanics – Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985

- [161]. Johnson, G.R., Cook W.H. A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures – Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics, The Hague, The Netherlands, 1983
- [162]. Johnson, G.R., Cook, W.H. Fracture Characteristics of Three Metals Subjected to Various Strains, Strain Rates, Temperatures and Pressures – Engineering Fracture Mechanics, том 21, 1985, № 1, стр. 31–48
- [163]. K. H. Swainger. Phil. Mag. – London, том 36, 1945, стр. 443
- [164]. K. H. Swainger. Phil. Mag. – London, том 38, 1947, стр. 422
- [165]. K. H. Swainger. Proc. 7th Int. Cong. App. Mech. – London, 1948
- [166]. Kojic M. and Bathe K. J., Studies of finite element procedures - stress solution at a closed elastic strain path with stretching and shearing using updated Lagrangian Jaumann formulation, Computers and Structures, Vol: 26, No. 1/2, pp: 175-179, 1987.
- [167]. Lemaitre J. A course on Damage Mechanics – Springer-Verlag, 1992
- [168]. Lin T. H. Analysis of elastic and plastic strains of a face – centered cubic crystal, J. Mech. Phys. Solids – 1957, том 5, № 1, стр. 143–149
- [169]. M. Abbas, F. Waeckel. Introduction to CodeAster – 2005
- [170]. M. Lupoae, C. Bucur. Building demolition – positive aspect of progressive collapse – MTA REVIEW. Vol. XIX, No. 4, Dec. 2009
- [171]. Maenchen G. Sack S. The TENSOR code in «Methods in Computational Physics», v. 3, Fundamental methods in Hydrodynamics – Academic Press, New York, 1964
- [172]. Mroz Z. On the description of anisotropic work – hardening. J. Mech. Phys. Solids – 1967, том. 15, № 3, стр. 163–175.
- [173]. MSC.Nastran Advanced Dynamic Analysis User's Guide – MSC.Software Corporation, 2004
- [174]. MSC.Nastran. Basic Dynamic Analysis User's Guide – MSC.Software Corporation, 2004
- [175]. Myrray D. W., Wilson E. L. Finite element large deflection analysis of

- plates – J. Engr. Mech. Div. ASCE, 1969, стр. 143-165
- [176]. N. A. Rahman, A. Elfouly, M. Booth. Alternate Path Progressive Collapse Analysis of Steel Stud Bearing Wall Structures – Structures Congress. 2011
- [177]. NIST Interim Report 6879 (May 2002) Ronald G. Rehm, William M. Pitts, Howard R. Baum, David D. Evans, Kuldeep Prasad, Kevin B. McGrattan and Glenn P. Forney – NIST, 2002
- [178]. NIST NCSTAR 1: Federal Building and Fire Safety Investigation of the World Trade Center Disaster: Final Report of the National Construction Safety Team on the Collapses of the World Trade Center Tower – NIST, 2009
- [179]. NIST NCSTAR 1A: Final Report on the Collapse of World Trade Center Building 7 \* – NIST, 2009
- [180]. Oden J. T. Numerical formulation of nonlinear elasticity problems – J. Struct. Div. ASCE., том 93, 1967, стр. 235-255
- [181]. Oldenburg M. Nilsson L. The position code algorithm for contact searching – Int. J. Num. Meth. Engng, 1994, том. 37, стр. 359-386
- [182]. Park K.C. and Felippa C.A. A variational principle for the formulation of partitioned structural systems – Int. J. Num. Meth. Engng., 2000, том. 47, стр. 395-418
- [183]. Pifco A.B., Winter R. Theory and application of finite element analysis to structural crash simulation – Computers and Structures, 1981, том 13; стр. 277-285
- [184]. Prandtl L. Zs. f. angew, Math. u. Mech; том 1, 1921
- [185]. Prandtl L. Zs. f. angew, Math. u. Mech; том 3, 1923
- [186]. R. Hill. The mathematical theory of plasticity – Oxford, Oxford University Press, 1998
- [187]. Reuss A., Z.s. f. angew, Math. u. Mech. том 10; 1930
- [188]. Simo J.C., Wriggers P., Schweizerhof K.H. and Taylor R.L. Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints – Int. J. Num. Meth. Engng., 1986, том 23, стр. 779-800



- [189]. Standards to Avoid Progressive Collapse – Large Panel Construction. – Great Britain, 1968
- [190]. Steinberg, D.J. and Guinan, M.W. A High-Strain-Rate Constitutive Model for Metals – University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCRL-80465, 1978
- [191]. Tresca H. E. Memoire sur l'ecoulement des corps solides soumis a de fortes pressions – Paris, Comptes rendus, 1864, том. 59, стр.754–758
- [192]. Tresca H. E. Memoire sur l'ecoulement des corps solides – Paris, Academie des sciences, 1868, том 18, стр. 733–799
- [193]. Tvergaard, V. Influence of Voids on Shear Band Instabilities under Plane Strain Conditions.– Int. J. Fract., №17, 1981, стр. 389–407
- [194]. Tvergaard, V. On Localization in Ductile Materials Containing Spherical Voids. Int. J. Fract., № 18, 1982, стр. 237–252
- [195]. Unified facilities criteria (UFC). Design of buildings to resist progressive collapse. Department of Defence, USA, 2009
- [196]. W. Prager. Duke Math. Journal, том 9, 1942, стр. 228
- [197]. W. Prager. Proc. 5th Int. Cong. App. Mech. – Cambridge, Mass, 1938, стр. 234
- [198]. W. Prager. Rev. Fac. Sci. Univ.– Istanbul, том 5, 1941, стр. 215
- [199]. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow. In: Methods in Computational Physics, v. 3, Fundamental methods in Hydrodynamics – Academic Press, New York, 1964, стр. 211–263
- [200]. Wilkins M.L. Computer simulation of penetration phenomena In: Ballistic materials and penetration mechanics – Roy C. Laible (Ed.), Amsterdam, New York, Oxford, 1980, стр. 225–252
- [201]. Wilkins M.L. Mechanics of penetration and perforation – Int. J. Engng. Sci., 1978, том 16, стр. 793-807
- [202]. Youn-Seo Roh. Scaling Study of LS-DYNA MPP on High Performance Servers. Sun Microsystems, Inc.
- [203]. Zerilli, F.J., Armstrong, R.W. (1987), Dislocation-mechanics-based constitu-

tive relations for material dynamics calculations – Journal of Applied Physics, № 61, 1987

[204]. Zerilli, F.J., Armstrong, R.W. Constitutive relations for the plastic deformation of metals – AIP Conference Proceedings, 1994

[205]. Zhong Z.H. Mackerle J. Contact-impact Problems: A Review with Bibliography. – Trans. ASME, Appl. Mech. Rev., 1993, том. 47(2), стр. 55-76